Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, L-Å Lindahl
B Ivarsson, Y Ameur, K Sigstam

DELTENTAMEN 2000-10-13
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $x = 0$ och $x = -2$
2. 0
3. $\pi/6$
4. 4
5. -1
6. 1/2
7. -1
8. -1
9. $-(\sin x)^{-2}\cos x = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$
10. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$
12. $\dfrac{1}{2(1+x)}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
13. $\dfrac{1}{2}(1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$
14. 0
15. 0
16. 1
17. $x > 1$
18. $x > 1$
19. $x \geq 1$ och $x \leq -1$
20. $x + 1$

4 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas.

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Tangentens ekvation är $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)$. Skärningen med y-axeln fås då $x = 0$ som ger $y = 1$.

2. Ändpunkter saknas så lokala extrempunkter söks i singulära punkter och kritiska punkter. $x = 0$ är singulär punkt ty funktionen är inte ens kontinuerlig där då $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$ och $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. $f(x) = x + 1 < 1$ då $x < 0$ och $f(x) = -x < 0 < 1$ för $x > 0$ så $x = 0$ är en lokal maximipunkt. $x = 1$ är en singulär punkt ty $f'_-(1) = -1$ och $f'_+(1) = 1$. $f(x) = -x > -1$ om $x < 1$ och $f(x) = x - 2 > -1$ om $x > 1$ så $x = 1$ är en lokal minimipunkt.

3. Låt tangeringspunkten vara $P = (a, \sqrt{a^2-1})$ där a ska bestämmas. Tangenten genom P har lutningen $y'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ och tangenten i P genom $(\frac{1}{2}, 0)$ till kurvan har ekvationen $y - 0 = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}(x - \frac{1}{2})$. Villkoret för att tangenten ska gå genom $P = (a, \sqrt{a^2-1})$ är att $\sqrt{a^2-1} = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}(a - \frac{1}{2})$. Ur denna ekvation finner man $a = 2$ och tangentens ekvation blir $y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})$ som kan skrivas $x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,y - \frac{1}{2} = 0$.

4. $g(x) = 1 + x$ är växande för $x < 0$. $h(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ är avtagande för $x > 0$ då $h'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$. Varje horisontell linje skär alltså grafen av $g(x)$ i högst en punkt och grafen av $h(x)$ i högst en punkt. Eftersom $\lim_{x\to 0-} g(x) = 1$ och $h(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 1$ för alla $x > 0$ finns ingen horisontell linje som skär båda graferna samtidigt. $f(x)$ är alltså 1-1. Inversen f^{-1} är funktionen

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1 \\ \dfrac{1}{x-1} - 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$