Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, H Avelin, K Sigstam

DELTENTAMEN 2001-10-15
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $x = 9$ och $x = -1$
2. 0
3. 1/2
4. -4
5. 1
6. $\pi/2$
7. -1
8. 1
9. $-(\cos x)^{-2}(-\sin x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
10. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
11. $\sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$
12. $\dfrac{2x}{1+x^4}$
13. $\dfrac{1}{x}$
14. 0
15. 0
16. 0
17. $|x| > 1$
18. $x \geq 1$
19. $|y| \leq \dfrac{\pi}{2}$
20. $\dfrac{1}{x}$

4 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas.

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Tangentens ekvation är $y - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}(x-1)$. Skärningen med y-axeln fås då $x = 0$ som ger $y = \frac{2}{e}$.

2. Lokala extrempunkterna söks i singulära punkterna, kritiska punkterna och i ändpunkterna. $x = 2$ är singulär punkt ty funktionen är inte ens kontinuerlig där då $f(2) = 4$ och $\lim_{x \to 0+} f(x) = 2$. $f(x) = 4 - (x-2)^2 < 4 = f(2)$ då $x < 2$ och $f(x) = x < 4$ för t ex $2 < x < 3$ så $f(2) = 4$ är ett lokalt maximivärde. $x = 5$ är en singulär punkt ty $f'_{-}(1) = 1$ och $f'_{+}(1) = -1$ och $f(5) = 5$ är på samma sätt ett lokalt maximivärde. I ändpunkterna $x = 0$ och $x = 10$ har funktionen lokala minimivärden, då $f(0) = f(10) = 0$ och $f(x) > 0$ i resten av intervallet. Funktionens absoluta maximum är $f(5) = 5$ och dess absoluta minimum är 0.

3. $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$ är avtagande för $x > 0$ då $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$. Varje horisontell linje skär alltså grafen av $f(x)$ i högst en punkt. $f(x)$ är alltså 1-1. Finesser vid kurvritningen: $y = 1$ är horisontell asymptot. Inflexionspunkt i $(1/\sqrt{3}, 7/4)$.
$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1} - 1}, \quad 1 < x \leq 2.$$

4. Låt tangeringspunkten vara $P = (a, -1-(a+1)^2)$ och $Q = (b, 1+(b-1)^2)$ där a och b ska bestämmas. Tangenten i P har lutningen $y'(a) = -2(a+1)$ och tangenten i Q lutningen $y'(b) = 2(b-1)$. Eftersom vi ska ha en gemensam tangent är dessa lutningar lika, dvs $-2(a+1) = 2(b-1)$ som ger
$$a = -b.$$
Den gemensamma tangentens lutning k kan också anges med hjälp av koordinaterna för P och Q.
$$k = \frac{(b-1)^2 + (a+1)^2 + 2}{b-a}.$$
Om vi utnyttjar att k också är lika med t ex $2(b-1)$ ovan får vi ekvationen
$$\frac{(b-1)^2 + (a+1)^2 + 2}{b-a} = 2(b-1)$$
som tillsammans med att $a = -b$ ger $b = \pm\sqrt{2}$ och alltså $a = \mp\sqrt{2}$. Vi får alltså två gemensamma tangenter till kurvorna. En tangent med tangeringspunkterna
$$P = (-\sqrt{2}, -4 + 2\sqrt{2}) \quad Q = (\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$$
samt en tangent med tangeringspunkterna
$$P = (\sqrt{2}, -4 - 2\sqrt{2}) \quad Q = (-\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}).$$