Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, H Avelin, A Pelander,
K Sigstam

DELTENTAMEN 2002-10-14
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $x > 4$ och $x < 0$
2. -1
3. $-1/2$
4. 1
5. $\dfrac{\pi}{2}$
6. 0
7. 3
8. $f'(0)$
9. $-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$
10. $2\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$
11. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
12. $\dfrac{\cos x}{\sin x}$
13. $\ln|x| + 1$
14. $-\infty$
15. 0
16. 0
17. $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$
18. $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$
19. $-\dfrac{\pi}{2}$
20. $y = \ln x^2$ $(y = 2\ln x)$

4 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas.

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Låt tangeringspunkten vara $P = (x_0, \ln x_0)$. En tangent i P har lutningen $\dfrac{1}{x_0}$. En linje genom P och origo har lutningen $\dfrac{\ln x_0}{x_0}$. Likhet ger $\ln x_0 = 1$ och $P = (e, 1)$.

2. Då definitionsmängden är öppen sökes lokala och absoluta extrempunkterna bland de kritiska och singulära punkterna.

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & 0 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x < 1 \\ 2/x^3, & x > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f'_-(1) = 1 \\ f'_+(1) = -1 \end{cases}$$

$\ln x + 1 = 0$ omm $x = 1/e$ som är lokal minimipunkt ty $f''(1/e) = e > 0$. $x = 1$ är en singulär punkt, lokalt maximum. Då f är kontinuerlig och $\lim_{x\to 0+} f(x) = -0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$ så är $f(1) = 0$ absolut maximum (Adam's Gift). Däremot har funktionen inget absolut minimum ty $f(1/e) = -1/e > -1$.

3. För $-\infty < x \le \ln 2$ är $f(x)$ strikt växande och $f(\ln 2) = 1$. För $x > \ln 2$ är $f(x)$ strikt avtagande, $\lim_{x\to \ln 2+} f(x) = 3/2$ och $f(x) > 1$. Varje horisontell linje skär alltså grafen av $f(x)$ i högst en punkt. $f(x)$ är alltså 1-1. $f(x)$ har $y = -1$ som horisontell asymptot då $x \to -\infty$ och $y = 1$ som horisontell asymptot då $x \to \infty$.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & -1 < x \le 1, \\ \ln \dfrac{1}{x-1}, & 1 < x < 3/2. \end{cases}$$

4. $f'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cos \dfrac{1}{x} = 0$ eftersom $\cos \dfrac{1}{x}$ är begränsad. Det går inte att beräkna $f'(0)$ som $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} (2x \cos \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ som ju inte existerar. $f'(x)$ är inte kontinuerlig i $x = 0$. Detta betyder också att vi vet att $f''(0)$ inte existerar utan att vi behöver verifiera detta genom uträkning.