Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

DELTENTAMEN 2004-10-11
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR DEL 1

1. $\frac{1}{2}$
2. 1
3. 3
4. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh x$
5. $\frac{2x}{1 + (1 + x^2)^2}$
6. $\ln |x| + 1$
7. $-\infty$
8. 0
9. 0
10. $|x| > \frac{1}{e}$
11. $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$
12. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ , & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}\ , & x < 0 \end{cases}$
13. $(2, \frac{1}{2})$
14. $(0, 0)$
15. x-axeln

1. Då definitionsmängden är öppen sökes absoluta extrempunkterna bland de kritiska och singulära punkterna.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-\frac{1}{3}x}(-1 + x \cdot \dfrac{1}{3}), & x > 0 \end{cases}$$

Funktionens största värde är 1 eftersom $f(0) = 1$ och $f(x) < 1,\ x \neq 0$. Vidare är $f'(x) = e^{-\frac{1}{3}x}(-1 + x \cdot \dfrac{1}{3}) = 0$ omm $x = 3$. Detta är enda kritiska punkten. Då f är kontinuerlig och $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ så är $f(3) = 1 - \dfrac{3}{e} < 0$ absolut minimum (Adam's Gift).

2. Då $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ är funktionen kontinuerlig i origo och då dessutom

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \ln^2 |x|}{x} = \lim_{x\to 0} \ln^2 |x| = +\infty$$

så är y-axeln vertikal tangent i origo.

Funktionen är udda och strikt växande i en omgivning av origo och det räcker därför att studera den för $x > 0$. Vi noterar att $f(x) > 0, x > 0,\ x \neq 1$ och att $f(1) = 0$ därför är ett minimum som blir lokalt för funktionen som helhet.

$f'(x) = \ln^2 x + 2x \cdot \ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2)$, $x > 0$. $f'(x) = 0$ omm $x = 1/e^2$ eller $x = 1$. Eftersom $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(1)$ har funktionen ett maximum $= 4/e^2$ för $x = 1/e^2$ (Adam's Gift) och då $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ är detta maximum lokalt. Mot detta lokala maximum svarar förstås ett motsvarande lokalt minimum då funktionen är udda.

Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
H Avelin, H Uscka-Wehlou, T Erlandsson

Deltenta del 2, lösningarna
ANALYS MN1
2004-10-11

1.
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ :\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

eller mer noggrant:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ :\ \forall\ x \in D_f\ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

där D_f betecknar definitionsmängden till f.

2. Medelvärdessatsen (The Mean Value Theorem - sats 11 på sidan 133 i Adams; bilden finns också på sidan 133 - Figure 2.25.):
Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i det slutna ändliga intervallet $[a, b]$ och deriverbar i det öppna intervallet (a, b). Då finns det en punkt $c \in (a, b)$ så att
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
Tolkningen: För en funktion som uppfyller villkoren i satsen finns det en punkt $c \in (a, b)$ så att tangenten till kurvan $y = f(x)$ har lutningskoefficient
$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
i punkten $(c, f(c))$, vilket betyder att tangenten är parallell med linjen som går igenom $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$.

3. Vi undersöker
$$\frac{n+1}{xn^2 + 2n} = \frac{n}{xn^2 + 2n} + \frac{1}{xn^2 + 2n} = \frac{1}{xn + 2} + \frac{1}{xn^2 + 2n}$$
och finner att den sista av dessa termer går mot 0 för alla x medans den första går mot 0 om $x \neq 0$ och mot 1/2 om $x = 0$. Alltså har vi
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$
Funktionen är konstant i intervallet $(-\infty, 0)$ och i intervallet $(0, \infty)$ och är därför kontinuerlig för alla $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funktionen är inte kontinuerlig i $x = 0$ eftersom höger- och vänstergränsvärden i $x = 0$ är lika med noll, medan $f(0) = \frac{1}{2}$.

4. Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i intervallet (a, b) och att för punkten c i (a, b) gäller $f(c) < 0$. Visa att då måste $f(x)$ anta negativa värden i någon omgivning av c, dvs att $f(x) < 0$ för alla x i intervallet $(c - \delta, c + \delta)$, där δ är något litet positivt tal:

bevis: Låt $\varepsilon = \dfrac{|f(c)|}{2}$. Eftersom funktionen är kontinuerlig, har vi $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Från (ε, δ)-definitionen vet vi att för detta ε gäller:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in (a, b) \ \ |x - c| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{|f(c)|}{2}$$

och det kan man skriva om (enligt definitionen av absolutbelopp) som:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in (a, b) \ \ x \in (c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon) \Rightarrow f(c) - \frac{|f(c)|}{2} < f(x) < f(c) + \frac{|f(c)|}{2}$$

och, eftersom

$$f(c) + \frac{|f(c)|}{2} = -|f(c)| + \frac{|f(c)|}{2} = -\frac{|f(c)|}{2} < 0,$$

då är $(c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon)$ en omgivning av c där alla funktionens värden är negativa och därmed är satsen bevisad.

OBS: man kan använda samma resonemang för att bevisa en analog sats för *positiva* värden.