

**Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon. **Skrivtid:** .

Maximal poäng på varje problem är 5. För godkänt krävs 18 poäng och för väl godkänt 28 poäng.

1. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x^2) - 1) \ln(1 - x)}{3x - \sin 3x}.$$

2. Bestäm största möjliga arean för triangeln  $ABC$ , rätvinklig vid  $B$ , om  $A = (0, 0)$ ,  $C$  ligger på parabeln  $y = x(2 - x)$ ,  $B = (x, 0)$  ligger på  $x$ -axeln och  $0 < x < 2$ .

3. Beräkna integralerna

$$a) \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx \qquad b) \int_1^e \ln x^2 dx.$$

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 5y = \cos x$$

för vilken  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

5. Beräkna volymen av den rotations kropp som genereras då kurvan

$$y = \sqrt{x} e^{x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

roterar kring  $x$ -axeln.

6. Skissera kurvan

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x - 1}}.$$

Bestäm definitionsområdet, asymptoter samt lokala extrempunkter.

7. Bevisa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \left( \sin \frac{1}{n} \right)$$

är konvergent för  $a > 0$ . Motivera noggrant.

8. Bestäm konstanterna  $a$  och  $b$  så att den funktion  $f(x)$ , som definieras av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}, & x > 0 \\ ax + b, & x \leq 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig och deriverbar i  $x = 0$ .