

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. **Skrivtid:** .

Maximal poäng på varje problem är 5. För godkänt krävs 18 poäng och för väl godkänt 28 poäng.

1. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x) - 2x \cos x}{x^2 \ln(1 + 2x)}.$$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' + 4y = e^{-2x}.$$

3. Beräkna integralerna

$$a) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx \qquad b) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

4. Bestäm största möjliga arean för triangeln ABC , rätvinklig vid B , om $A = (0, 0)$, C ligger på kurvan $y = xe^{-x}$, $B = (x, 0)$ ligger på x -axeln och $0 < x < \infty$.

5. Beräkna volymen av den rotations kropp som genereras då området

$$0 \leq y \leq \arctan x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

roterar kring y -axeln.

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

för vilken $y(0) = 0$.

7. Visa olikheten

$$\ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \geq 1.$$

8. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent och $a_n > 0$ för alla $n \geq 1$.

a) Visa att det finns ett tal N sådant att $\sin a_n > 0$ för alla $n \geq N$.

b) Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ är konvergent.