

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Maximal poäng på varje problem är 5. För godkänt krävs 18 poäng och för väl godkänt 28 poäng.

1. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2x \cos x}{x^2 \ln(1 - 3x)}.$$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' - 4y = e^{2x}.$$

3. Beräkna integralerna

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x \arctan x^2}{1 + x^4} dx \qquad b) \int_0^{\sqrt{e}} x \ln x^2 dx.$$

4. Triangeln ABC är rätvinklig vid B . $A = (0, 0)$, C ligger på kurvan $y = x(x - 1)(x - 2)$, $B = (x, 0)$ ligger på x -axeln. Bestäm x så att triangeln får maximal area då $0 < x < 1$. Motivera noggrant.

5. Skissera kurvan

$$y = \frac{(x - 2)e^{-x}}{x - 1}.$$

Bestäm speciellt definitionsområdet samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

6. Beräkna volymen av den rotationskropp som genereras då området

$$0 \leq y \leq \tan x^2, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

roterar kring y -axeln.

7. Undersök för vilka värden på det reella talet a som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a \sin \frac{1}{n^2}$$

är konvergent. Motivera noggrant.

8. Visa att funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, där

$$f(x) = x^2|x|, \quad -\infty < x < \infty$$

är två gånger deriverbar men inte tre gånger deriverbar i origo.