Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Lars-Åke Lindahl
Björn Ivarsson, Mattias Palmer

Övningstentamen 1
Analys MN1
1999-12-17

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x^2)-1)\ln(1-x)}{3x-\sin 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^4}{4!}-\ldots)-1\right]\left[(-x)-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}+\ldots)\right]}{3x-\left(3x-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}-\ldots)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots\right)\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots)\right)}{\frac{(3x)^3}{3!}-\frac{(3x)^5}{5!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{2}+\frac{x^6}{4}+\ldots}{\frac{27x^3}{3!}-\frac{3^5x^5}{5!}+\ldots}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\ldots}{\frac{27}{3!}-\frac{3^5x^2}{5!}+\ldots}=0.$$

2. Triangelns bas har längden x och triangelns höjd är $x(2-x)$.
Triangelns area är därför $A(x)=\dfrac{x\cdot x(2-x)}{2}$, $0<x<2$. Den deriverbara funktionen $A(x)$ uppfyller $A(x)>0$ i $0<x<2$ och i intervallets ändpunkter är $A(x)=0$. Funktionen har därför ett största värde i det inre av intervallet och det är att söka bland de x för vilka $A'(x)=0$. Då $A(x)=x^2-x^3/2$ finner vi $A'(x)=2x-3x^2/2=x(2-(3/2)x)$ och detta ger $A'(x)=0$ då $x=0$ eller $x=4/3$. Det enda nollstället till $A'(x)$ i $0<x<2$ är $x=4/3$ som alltså ger maximala triangelarean $=16/27$.

3.

$$\int_0^\infty\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx=\left.\frac{\arctan^2 x}{2}\right|_0^\infty=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

$$\int_1^e\ln x^2\,dx=2\int_1^e\ln x\,dx=\,2x\ln x|_1^e-2\int_1^e x\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=2x\ln x|_1^e-2\int_1^e\,dx=[\ln e=1,\ln 1=0]=(2e-0)-(2e-2)=2.$$

Observera skillnaden mellan $\ln x^2=\ln(x^2)$ och $\ln^2 x=(\ln x)^2$.

4. Den homogena ekvationen $y''+2y'+5y=0$ har karakteristiska ekvationen $r^2+2r+5=0$ med rötterna $-1\pm 2i$ så lösningarna till homogena ekvationen är $y_H = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y''+2y'+5y = \cos x$ ansättes $y_P = A\cos x + B\sin x$. Derivering och insättning ger $A=1/5, B=1/10$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x.$$

Den lösning för vilken $y(0)=0,\ y'(0)=1$ bestäms slutligen till

$$y = e^{-x}(-\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{7}{20}\sin 2x) + \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x.$$

5. Volymen är

$$V = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}\,e^{x^2}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 xe^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}(e^2-1).$$

6.

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}.$$

Definitionsområdet är $x>1$. Vertikal asymptot är $x=1$ och $\lim\limits_{x\to 1+} y = +\infty$. Kurvan har inga sneda asymptoter men då

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}} = \sqrt{x+1+\frac{2}{x+1}}$$

uppför sig kurvan som $\sqrt{x+1}$ för stora positiva x.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

Derivatan har alltså nollställena $1\pm\sqrt{2}$ men endast $1+\sqrt{2}$ ligger inom definitionsområdet $x>1$. Eftersom kurvan är deriverbar för $x>1$ och $\lim\limits_{x\to 1+} y = +\infty$ samt $\lim\limits_{x\to\infty} y = +\infty$ måste $1+\sqrt{2}$ vara en minimipunkt.

7.

$$\frac{\frac{1}{n^a}(\sin\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^{a+1}}} = \frac{\frac{1}{n^a}(\frac{1}{n} - \frac{(\frac{1}{n})^3}{3!} + \ldots)}{\frac{1}{n^{a+1}}} = \frac{\frac{1}{n^{a+1}}(1 - \frac{(\frac{1}{n})^2}{3!} + \ldots)}{\frac{1}{n^{a+1}}} =$$

$$= 1 - \frac{(\frac{1}{n})^2}{3!} + \ldots \to 1, \qquad n\to\infty.$$

Alltså är den givna serien konvergent då $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a+1}}$ konvergerar, dvs för $a>0$.

8. Maclaurinutveckling ger

$$\frac{\ln(1+2x)}{x} = \frac{2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \dots}{x} = 2 - 2x + \frac{8}{3}x^2 - \dots$$

För att funktionen f ska bli kontinuerlig i $x = 0$ måste

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = f(0) = b.$$

Eftersom $\lim_{x \to 0-} f(x) = b = f(0)$ och $\lim_{x \to 0+} f(x) = 2$ följer att $b = 2$.

Funktionen är deriverbar i $x = 0$ om $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ existerar dvs om

$$f'_{-}(0) = f'_{+}(0).$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = a.$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{(2 - 2x + \frac{8}{3}x^2 - \dots) - 2}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} (-2 + \frac{8}{3}x - \dots) = -2.$$

Alltså är f deriverbar om $a = -2$.