Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Lars-Åke Lindahl
Björn Ivarsson, Mattias Palmer

Övningstentamen 2
Analys MN1
1999-12-17

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(2x)-2x\cos x}{x^2\ln(1+2x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[2x-\frac{(2x)^3}{3}+\frac{(2x)^5}{5}-\ldots\right]-2x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)}{x^2\left[2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\ldots\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{8x^3}{3}+\frac{32x^5}{5}-\ldots-2x+\frac{2x^3}{2!}-\frac{2x^5}{4!}+\ldots}{2x^3-\frac{4x^4}{2}+\frac{8x^5}{3}-\ldots}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5x^3}{3}+\ldots}{2x^3+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{3}+\ldots}{2+\ldots}=-\frac{5}{6}.$$

2. Den homogena ekvationen $y''+4y=0$ har karakteristiska ekvationen $r^2+4=0$ med rötterna $\pm 2i$ så lösningarna till homogena ekvationen är $y_H=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y''+4y=e^{-2x}$ ansättes $y_P=Ae^{-2x}$. Derivering och insättning ger $A=1/8$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{8}e^{-2x}.$$

3.

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sin x(\cos x)^{-5}\,dx=$$

$$=[inre\quad derivata]=\frac{1}{4}(\cos x)^{-4}\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}\left((\frac{1}{\sqrt{2}})^{-4}-1\right)=\frac{3}{4}.$$

$$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\ln x\,dx=[partiell\quad integration]=$$

$$=2x^{\frac{1}{2}}\ln x\Big|_0^1-2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=0-2\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=-4\,x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=-4.$$

Observera att $2x^{\frac{1}{2}}\ln x\Big|_0^1=0$ ty $\ln 1=0$ och $\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{2}}\ln x=0$ som är ett standardgränsvärde.

4. Triangelns bas har längden x och triangelns höjd är xe^{-x}.

Triangelns area är därför $A(x) = \dfrac{x^2 e^{-x}}{2}$, $\quad 0 < x < \infty$. Den deriverbara funktionen $A(x)$ uppfyller $A(x) > 0$ i $0 < x < \infty$ och då $\lim_{x \to 0} A(x) = 0$ samt $\lim_{x \to \infty} A(x) = 0$ har funktionen därför ett största värde i $0 < x < \infty$ och det är att söka bland de x för vilka $A'(x) = 0$. Då $A'(x) = xe^{-x} - \dfrac{x^2}{2}e^{-x}$ finner vi $A'(x) = xe^{-x}(1 - x/2)$ och detta ger $A'(x) = 0$ då $x = 0$ eller $x = 2$. Det enda nollstället till $A'(x)$ i $0 < x < \infty$ är $x = 2$ som alltså ger maximala triangelarean $= 2e^{-2}$.

5. Volymen är

$$V = 2\pi \int_0^1 x \arctan x \, dx = [partiell \quad integration] =$$

$$= 2\pi \left. \frac{1}{2}x^2 \arctan x \right|_0^1 - 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{1+x^2} \, dx = [kort \quad division] =$$

$$= 2\pi \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \pi \int_0^1 dx + \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \pi\frac{\pi}{4} - \pi + \pi \arctan x|_0^1 =$$

$$= \pi\frac{\pi}{4} - \pi + \pi\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2} - \pi.$$

6. Eftersom en primitiv funktion till $\dfrac{2x}{1+x^2}$ är $\ln(1+x^2)$ är alltså

$$e^{\ln(1+x^2)} = 1 + x^2$$

en integrerande faktor till den givna differentialekvationen. Efter multiplikation med den integrerande faktorn erhålles ekvationen

$$\frac{d}{dx}(1+x^2)y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrering ger

$$(1+x^2)y = \arctan x + C$$

dvs

$$y = \frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{C}{1+x^2}.$$

Eftersom $y(0) = 0$ måste $C = 0$ och lösningen blir

$$y = \frac{\arctan x}{1+x^2}.$$

7. Vi studerar funktionen

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x, \quad x \geq 1.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{x} = \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Alltså är $f'(x) > 0$ för $x > 1$ och det följer att $f(x)$ är strikt växande för $x > 1$. Eftersom $f(1) = 0$ blir alltså $f(x) \geq 0$ för $x \geq 1$. V.S.B

8. Om en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent så är $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dvs det finns ett tal N så att $|a_n| < \pi/4$ för alla $n \geq N$. För vår serie är dessutom $a_n > 0$ för alla n så eftersom $0 < a_n < \pi/4$ för $n \geq N$ följer alltså att $\sin a_n > 0$ för alla $n \geq N$.

Serien $\sum_{n=N}^{\infty} \sin a_n$ är alltså positiv och vi kan använda jämförelsekriteriet med gränsvärde för positiva serier. Vi jämför $\sum_{n=N}^{\infty} \sin a_n$ med den konvergenta positiva serien $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ och finner att då

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1,$$

eftersom $a_n \to 0$, så är serien $\sum_{n=N}^{\infty} \sin a_n$ konvergent. Då är också den givna serien $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ konvergent.