Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Lars-Åke Lindahl
Björn Ivarsson, Mattias Palmer

Övningstentamen 3
Analys MN1
1999-12-17

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x\cos x}{x^2 \ln(1-3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots\right] - 2x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right)}{x^2\left[-3x - \frac{(3x)^2}{2} + \dots\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x - \frac{8x^3}{2\cdot 3} + \dots - 2x + \frac{2x^3}{2!} - \dots}{-3x^3 - \frac{9x^4}{2} + \dots} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4x^3}{3} + \frac{3x^3}{3} + \dots}{-3x^3 + \dots} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3} + \dots}{-3 + \dots} = \frac{1}{9}.$$

2. Den homogena ekvationen $y'' - 4y = 0$ har karakteristiska ekvationen $r^2 - 4 = 0$ med rötterna ± 2 så lösningarna till homogena ekvationen är $y_H = C_1 e^{-2x}x + C_2 e^{2x}$. För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y'' - 4y = e^{2x}$ ansättes $y_P = Axe^{2x}$. Derivering och insättning ger $A = 1/4$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y = C_1 e^{-2x}x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}.$$

3.

$$\int_0^\infty \frac{x\tan^{-1} x^2}{1+x^4}\,dx = [x^2 = u] = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} u}{1+u^2}\,du$$
$$= \frac{1}{4}(\tan^{-1} u)^2\Big|_0^\infty = \frac{\pi^2}{16}.$$

$$\int_0^{\sqrt{e}} x\ln x^2\,dx = 2\int_0^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx = [partiell \quad integration] =$$
$$= x^2\ln x\Big|_0^{\sqrt{e}} - \int_0^{\sqrt{e}} x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = 0.$$

Observera att $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$ och $\lim_{x\to 0} x^2\ln x = 0$ som är ett standardgränsvärde.

4. Triangelns bas har längden x och triangelns höjd är $x(x-1)(x-2)$.
Triangelns area är därför $A(x) = \frac{1}{2}x^2(x-1)(x-2), \quad 0 < x < 1$. Den deriverbara funktionen $A(x)$ uppfyller $A(x) > 0$ i $0 < x < 1$ och då $\lim_{x \to 0} A(x) = 0$ samt $\lim_{x \to 1} A(x) = 0$ har funktionen därför ett största värde i $0 < x < 1$ och det är att söka bland de x för vilka $A'(x) = 0$. Då $A'(x) = \frac{1}{2}(4x^3 - 9x^2 + 4x)$ finner vi $A'(x) = 0$ då $x = \frac{9+\sqrt{15}}{8}$ eller $x = \frac{9-\sqrt{15}}{8}$. Det enda nollstället till $A'(x)$ i $0 < x < 1$ är $x = \frac{9-\sqrt{15}}{8}$ som alltså ger maximala triangelarean $= A\left(\frac{9-\sqrt{15}}{8}\right)$ där $A(x) = \frac{1}{2}x^2(x-1)(x-2)$.

5. Definitionsmängden är alla $x \neq 1$. Horisontell asymptot då $x \to +\infty$ är x-axeln. Vertikal asymptot är $x = 1$. Maxpunkt i $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Minimipunkt i $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

6. Volymen är

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi/4}} x \tan x^2 \, dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi/4}} x \frac{\sin x^2}{\cos x^2} \, dx = [inre \quad derivata] =$$

$$= -2\pi \, \frac{1}{2} \ln(\cos x^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi/4}} = \frac{1}{2}\pi \ln 2.$$

7. I den positiva serien $\sum a_n$ utvecklar vi a_n i Maclaurinserie.

$$a_n = n^a \sin \frac{1}{n^2} = n^a\left(\frac{1}{n^2} + \ldots\right) = n^{a-2} + \ldots.$$

Vi jämför med den positiva $\sum b_n$ där $b_n = n^{a-2}$ (limit comparison).

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{a-2} + \ldots}{n^{a-2}} = 1 + \ldots \to 1$$

då $n \to \infty$. Alltså är den givna serien konvergent då $\sum b_n$ är konvergent, dvs för $a-2 < -1$, alltså för $a < 1$.

8. $f'(x) = 3x|x|, \ x \neq 0$, och $f''(x) = 6|x|, \ x \neq 0$, som ju inte är deriverbar i origo, dvs $f^{(3)}(0)$ existerar inte. Derivatans definition ger direkt $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$ och $f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = 0$.