Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, L-Å Lindahl
B Ivarsson, Y Ameur, K Sigstam

TENTAMEN 2000-12-14
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. 2
2. $\frac{3}{2}$
3. 2
4. $\frac{1}{4}$
5. π
6. π
7. $-\cos x + 1$
8. $y^2 = 4\sqrt{x} + C$
9. $y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$
10. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x - 2$
11. 2
12. 1
13. $y = 0$
14. $-\frac{1}{2e}$
15. 1
16. $a > 0$
17. 2
18. $y = Ce^{-1/x}$
19. $\frac{3}{4}$
20. $y = 0$

4 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas.

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Triangelns area $A(x)$ är funktionen $A(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2x - x\sqrt{x}, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$

   $A(x)$ är kontinuerlig på $0 < x \leq 4$, $\lim_{x \to 0+} A(x) = 1$ och $A(4) = 0$. Maximum är därför antingen $A = 1$ som erhålles för $0 < x \leq 1$ eller lika med ett värde som fås i en punkt i $1 < x < 4$. Denna punkt måste vara nollställe till $A'(x)$ för $1 < x < 4$. $A'(x) = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$. $A'(x) = 0$ då $\sqrt{x} = \frac{4}{3}$, dvs $x = \frac{16}{9}$ som just ligger i intervallet $1 < x < 4$. Man finner att $A(\frac{16}{9}) = \frac{32}{27} > 1$ som alltså är det största värdet.

2. Definitionsmängden är $x \neq 1$. Vertikal asymptot är $x = 1$. $\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x - 1} = -1$ och $\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{1/x - 1} = +1$ så horisontella asymptoter är $y = -1$ då $x \to +\infty$ och $y = +1$ då $x \to -\infty$. För värden på x nära origo är $y = |x|(1-x)^{-1} = |x|(1 + x + \ldots)$ så grafen har en spets i origo.

$$y' = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1-x)^2}, & -\infty < x < 0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2}, & 0 < x < 1, 1 < x < \infty \end{cases}$$

   Funktionen är alltså avtagande för $-\infty < x < 0$ och växande i intervallen $0 < x < 1$ respektive $1 < x < \infty$. Lokalt minimum $y(0) = 0$.

3. Volymen är beloppet av $2\pi \int_0^1 x \ln x \, dx$. Med partiell integration finner vi att denna integral blir $= 2\pi \frac{1}{2} x^2 \ln x |_0^1 - 2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = -\frac{\pi}{2}$. Volymen är alltså $\frac{\pi}{2}$. Vi har använt att $\lim_{x \to 0+} x^2 \ln x = 0$ och $\ln 1 = 0$.

4.
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

   eftersom $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ för $x \neq 0$. För $x \neq 0$ är

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

   Eftersom $x \sin \frac{1}{x} \to 0$ då $x \to 0$ men $\cos \frac{1}{x}$ antar värdena -1 och +1 hur nära origo som helst har alltså $f'(x), x \neq 0$ inget gränsvärde då $x \to 0$. Alltså är $f'(x)$ diskontinuerlig i origo.