Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, L-Å Lindahl
B Ivarsson, Y Ameur, K Sigstam

TENTAMEN 2001-01-17
Analys MN1

SVAR PÅ FRÅGORNA

1. 1
2. 3
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{2}$
5. $\frac{\pi}{4}$
6. $\frac{\pi}{4}$
7. $\frac{1}{2}x^2 + x + 1$
8. $y = Ce^{\frac{2}{3}x^{3/2}}$
9. $y = x^3 + Cx^2$
10. $y = Ce^{-x} + xe^{-x}$
11. 1
12. 2
13. $y = 0$
14. $\frac{4}{e^2}$
15. 1
16. Ja
17. $2(1 - \frac{1}{e})$
18. $y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 1}$
19. $\frac{3}{4}$
20. $y = 0$

4 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas.

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $0 \le x \le 4$. Maximum erhålles därför antingen i ändpunkterna , dvs i $x = 0$ eller i $x = 4$, eller i någon av de kritiska punkterna där $f'(x)$ antingen inte existerar eller är lika med 0. De kritiska punkterna är $x = 1$, där $f'(x)$ inte existerar, samt $x = 3$ där $f'(x) = \frac{1}{4}(2x - 6)$ har ett nollställe. Eftersom $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(3) = \frac{1}{2}$ och $f(4) = \frac{5}{8}$ följer att funktionen $f(x)$ har största värdet $= 1$.

2. Definitionsmängden är $\{0 \le x < 1, x > 1\}$. Vertikal asymptot är $x = 1$. $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1/x - 1}\right) = 0$ så horisontell asymptot är $y = 0$ då $x \to +\infty$. För värden på $x > 0$ nära origo är $y = \sqrt{x}(1-x)^{-1} = \sqrt{x}(1+x+\ldots)$ så grafen kan skissas som $\sqrt{x}$ nära origo.

   $y' = \frac{x^{1/2} + x^{-1/2}}{2(1-x)^2} > 0$ för $0 < x < 1$ och $x > 1$ så funktionen är strikt växande i dessa intervall var för sig. Origo blir en lokal minimipunkt i definitionsmängdens vänstra ändpunkt. Täljaren i $y'' = \frac{3x^{1/2} + 6x^{-1/2} - x^{-3/2}}{4(1-x)^3}$ kan vi skriva $\frac{1}{x^{3/2}}(3x^2 + 6x - 1)$ som har det enkla nollstället $-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ i definitionsmängden. Inflexionspunkten har alltså x-koordinaten $-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Med partiell integration finner vi att volymen blir $2\pi\frac{1}{2}x^2\ln(1+\frac{1}{x})|_0^1 - 2\pi\int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})\,dx = \pi(\ln 2 + \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx) = \pi(\ln 2 + \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx) = \pi(\ln 2 + 1 - \ln(1+x)|_0^1) = \pi(\ln 2 + 1 - \ln 2) = \pi$. Vi har använt att $\lim_{x\to0+} x^2\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to0+} x^2 \ln\frac{1+x}{x} = \lim_{x\to0+} x^2\ln(1+x) - \lim_{x\to0+} x^2\ln x = 0$ och $\ln 1 = 0$.

4.
$$f'(0) = \lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} te^{-t^2} = 0.$$

   För $x \ne 0$ är $f'(x) = 2\frac{1}{x^3}e^{-1/x^2}$. Alltså är

$$f''(0) = \lim_{x\to0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{(2/x^3)e^{-1/x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to0} \frac{(2/x^3)e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} 2t^4e^{-t^2} = 0.$$

   För $x \ne 0$ är $f''(x) = -\frac{6}{x^6}(x^2 - \frac{2}{3})e^{-1/x^2}$ som har enkla nollställen i $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ som alltså är inflexionspunkternas respektive x-koordinater. Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$ är $y = 1$ horisontell asymptot.