Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, J Eriksson, K Sigstam

TENTAMEN 2001-12-14
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. 0
2. 2
3. 1
4. $1 - \frac{1}{e}$
5. 1
6. $y = e^{-x} + x - 1$
7. $y = \sqrt{1 + \ln x^2}$
8. $y = 1 - e^{-\sin x}$
9. $y = xe^x - e^x + 1$
10. $y = x$
11. 1
12. $\frac{1}{3}$
13. $x = 1$
14. $y = 0$
15. $\frac{1}{\sqrt{e}}$
16. 2
17. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
18. $\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$
19. 1
20. $\sin k^2$ De som tolkat problemet som $\lim_{x \to 0} \frac{\sin k^2 x^2}{x^2}$ och erhållit k^2 får också rätt.

4 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas.

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Standardgränsvärdet $\lim_{t\to 0+} t\ln t = 0$ samt $\ln 1 = 0$ ger att båda gränsvärdena är 0.

   $y' = \ln\frac{1-x}{x}$. Funktionen saknar singulära punkter och $y' = 0$ om och endast om $\frac{1-x}{x} = 1$, dvs y' har det enda nollstället $x = \frac{1}{2}$. Eftersom $y(\frac{1}{2}) = \ln 2 > 0$ följer direkt enligt en sats i Adams Calculus (Adam's Gift) att funktionens största värde är $\ln 2$.

2. Definitionsmängden är $x \neq 0$. Vertikal asymptot är $x = 0$. $\lim_{x\to\pm\infty} y-(x-2) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ så sned asymptot är $y = x - 2$ då $x \to \pm\infty$.

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad y'' = \frac{2}{x^3}.$$

   Alltså är $x = \pm 1$ nollställen till derivatan och andraderivatan ger att vi har lokalt minimum $= 0$ i $x = 1$ och lokalt maximum $= -4$ i $x = -1$. Eftersom kurvan saknar vertikala tangenter och y'' saknar nollställen kan det inte finns några inflexionspunkter.

3. Arean är $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

   Volymen är $2\pi\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\pi\sqrt{1-x^2}|_0^1 = 2\pi$.

4. $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x - \frac{x^3}{2!} + \ldots)/x - 1}{x} = 0.$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = [f'(0) = 0] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots) - (x - \frac{x^3}{3!} + \ldots)}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

   Alternativt kan vi använda teorin för potensserier i Adams, Ch. 9.5, 9.6. För alla $x \neq 0$ har vi

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

   Eftersom $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ blir $f(x)$ kontinuerlig i $x = 0$ om vi definierar $f(0) = 1$ och serien konvergerar mot $f(x)$ för alla reella x enligt kvotkriteriet. Enligt Sats 21 Ch. 9.5 får vi då $f^{(k)}(0) = k!\,a_k$ och det följer direkt att $f'(0) = 0$ och $f''(0) = -\frac{2!}{3!} = -\frac{1}{3}$. Med denna metod finner man lätt samtliga derivator $f^{(k)}(0)$ av $f(x)$ i $x = 0$.