Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, H Avelin
A Pelander, K Sigstam

TENTAMEN 2002-12-13
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. 1
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{\pi}{2}$
4. $\ln 3$
5. 0
6. $y = 0$
7. $y = -\ln(1 - x)$
8. $y = xe^{-x}$
9. $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - 1$
10. $y^2 = x$
11. 1
12. $\frac{3}{2}$
13. $-\frac{1}{3}$
14. x-axeln
15. x-axeln
16. $\frac{1}{1 + 1/4} = \frac{4}{5}$
17. $-1 \leq x < 1$
18. $a_n = 1, n = 0, 1, 2 \ldots$
19. $\frac{\pi}{4}$
20. $y = 1$

4 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Definitionsmängden är $x \neq 0$. Vertikal asymptot är $x = 0$. $\lim_{x\to\pm\infty} y - (x-2) =$ $= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ så $y = x - 2$ är sned asymptot då $x \to \pm\infty$. $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$. $y'(1) = 0$ ger lokalt minimum $= 0$ och $y'(-1) = 0$ ger lokalt maximum $=-4$. Inga inflexionspunkter.

2.
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ f(0) = 0,\ f'(x) = (1-x)e^{-x},\ f'(1) = 0.$$
Funktionen har största värdet $1/e$ i $x = 1$ enligt Adam's Gift. Asymptot är x-axeln. Volymen är
$$\pi\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx = -\pi\frac{1}{2}x^2e^{-2x}|_0^\infty + \pi\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx = 0 - \pi\frac{1}{2}xe^{-2x}|_0^\infty + \pi\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx =$$
$$= 0 + 0 - \pi\frac{1}{4}e^{-2x}|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

3. $f(x) = -x^2\ln x$, som är kontinuerlig på $0 < x \le 1$, $\lim_{x\to+0} f(x) = 0$, $f(1) = 0$. $f'(x) = -2x\ln x - x = -x(\ln x^2 + 1)$. $f'(1/\sqrt{e}) = 0$ och största värdet är $\frac{1}{2e}$ i $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ enligt Adam's Gift. $\lim_{x\to+0} f'(x) = 0$, $f'(1) = -1$. $f''(x) = -2\ln x - 2 - 1 = -(2\ln x + 3)$. $f''(\frac{1}{e^{3/2}}) = 0$. $f''(x)$ växlar tecken i $x = \frac{1}{e^{3/2}}$ så $(\frac{1}{e^{3/2}}, \frac{3}{2e^3})$ är inflexionspunkt.

4.
$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\quad f'(x) = e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^2}e^{-1/x^2},\ x \neq 0,$$
$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^5}e^{-1/x^2} = -2\,\frac{x^2-2}{x^5}\,e^{-1/x^2},\ x \neq 0.$$
$\lim_{x\to 0} x^{-n}e^{-1/x^2} = \lim_{t\to\pm\infty} t^n e^{-t^2} = 0$, $n \in \mathbf{Z}$. Därför är $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ och $f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = 0$. Vidare är $f''(\pm\sqrt{2}) = 0$. $f''(x)$ byter tecken kring samtliga nollställen så vi har inflexion i origo samt i $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{\frac{2}{e}})$.

Det finns inga lodräta asymptoter. Då $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$ är $y = x + l$ kandidat som sned asymptot. Vi försöker bestämma l.
$$l = \lim_{x\to\pm\infty}(xe^{-1/x^2} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{-1/x^2} - 1) = \lim_{t\to\pm 0}\frac{e^{-t^2} - 1}{t} =$$
$= \lim_{t\to\pm 0}\frac{1 - t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + \ldots - 1}{t} = 0$ så $y = x$ är alltså sned asymptot då $x \to \pm\infty$.