Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, H Avelin
A Pelander, K Sigstam

TENTAMEN 2003-01-16
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. 0
2. $\dfrac{\pi}{4}$
3. $\dfrac{\pi}{2}$
4. $\ln\dfrac{1}{2}$
5. 0
6. $y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$
7. $y = \ln(x + e)$
8. $y = (x + 1)e^x$
9. $y = 1 + \sin x$
10. $y = \sqrt{1 + 2x^2}$
11. 1
12. $\dfrac{3}{2}$
13. -1
14. y-axeln
15. $x = 1$
16. $\dfrac{1}{1 - 1/e}$
17. $-1 < x \leq 1$
18. $-\dfrac{1}{2}$
19. 2
20. $y = 0$

4 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Definitionsmängden är $x \neq 1$. Vertikal asymptot är $x = 1$. Horisontell asymptot är $y = 0$ då $x \to \pm\infty$. $y' = -\dfrac{1+x}{(x-1)^3}$, $y'' = 2\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$. $y'(-1) = 0$ ger lokalt minimum $= -1/4$ eftersom t ex $y''(-1) > 0$. $y''(-2) = 0$ ger inflexionspunkt i $(-2, -2/9)$ eftersom y'' byter tecken vid $x = -2$.

2. $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$ vars graf ska vara välkänd. Volymen är

$$-2\pi \int_0^1 x \ln x \, dx = -\pi x^2 \ln x|_0^1 + \pi \int_0^1 x^2 \frac{1}{x} \, dx = 0 + \pi \int_0^1 x \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Vi har utnyttjat standardgränsvärdet $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 \ln x = 0$.

3. $f(x) = x \ln^2 x$ är kontinuerlig på $0 < x \leq 1$, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} (\sqrt{x} \ln x)^2 = 0$, $f(1) = 0$.
$f(1/e) > 0$ så $f(x)$ har ett största värde på $0 < x < 1$ (Adam's Gift).
$f(x) = \ln^2 /x$ är kontinuerlig på $1 < x < \infty$, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \ln^2 x/x = 0$.
$f(e) > 0$ så $f(x)$ har ett största värde på $1 < x < \infty$ (Adam's Gift).
Största värdet är att söka bland derivatans nollställen. För $0 < x < 1$ är $f'(x) = \ln^2 x + 2\ln x$ så maximipunkt är $(1/e^2, 4/e^2)$. För $1 < x < \infty$ är $f'(x) = (2\ln x - \ln^2 x)/x^2$ så maximipunkt är $(e^2, 4/e^2)$. Det största värdet är alltså $4/e^2$.
Genom att i t ex fallet $x > 1$ sätta $x = 1/t$ skulle vi istället kunna studera funktionen $f(t) = t \ln^2(1/t)$ för $0 < t < 1$. Eftersom $f(t) = t(-\ln t)^2 = t \ln^2 t$, $0 < t < 1$ skulle vi då få samma funktion att studera som i fallet $0 < x < 1$. Detta förklarar varför de båda funktionsgrenarna har samma största värde.

4.

$$f(x) = e^{-1/|x|},\ x \neq 0. \text{ Då är } f'(x) = \frac{e^{-1/|x|}}{x^2} \operatorname{sgn} x, \quad f''(x) = (1 - 2x \operatorname{sgn} x)\frac{e^{-1/|x|}}{x^4}.$$

$\lim\limits_{x \to 0} x^{-n} e^{-1/|x|} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} t^n e^{-|t|} = 0$, $n \in \mathbf{Z}$. Då $f(0) = 0$ är därför
$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ och $f''(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = 0$. Vidare är $f''(\pm 1/2) = 0$.
$f''(x)$ byter tecken bara vid $x = \pm 1/2$ så vi har inflexion i $(\pm 1/2, 1/e^2)$. Origo är en minimipunkt eftersom $f(x) > 0$, $x \neq 0$.
Det finns inga lodräta asymptoter. Då $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to \pm 0} e^{-|t|} = 1$ är alltså $y = 1$ horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$. Vid kurvritningen noterar vi att $f(x)$ är en jämn funktion.