Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

TENTAMEN 2003-12-12
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

FRÅGOR

1. $\frac{1}{2}$
2. $-\frac{1}{4}$
3. $-\frac{1}{2}$
4. $-\frac{3}{2}$
5. $y = 0$ (dvs $x-$axeln)
6. $y = -\sin x + x$
7. $y = 0$ (dvs $y = 0$ för alla x)
8. $y = 1 - \cos x$
9. $y = e^{x^2} - 1$
10. $y = e^{x^2} - 1$ (lätt att separera men det är samma ekvation som i uppgift 9)
11. $\dfrac{1}{1 + 1/e}$
12. $-1 \leq x < 1$
13. $a_2 = \dfrac{1}{2}$ $\Big(1/\sqrt{1-x^2} = (1 + (-x^2))^{-\frac{1}{2}} = 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) + \cdots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$ så $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}, \ldots\Big)$
14. Konvergensradien är 2 (serien är geometrisk)
15. $f''(0) = 1$

SVAR OCH ANVISNINGAR

Två problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas

1. Definitionsmängden är $x \neq 9/2$. Vertikal asymptot är $x = 9/2$. Horisontell asymptot är $y = 0$ då $x \to +\infty$. Eftersom $\lim_{x \to -\infty} y/x$ inte existerar har funktionen inga fler asymptoter. $y' = \dfrac{2(x-3/2)(x-3)}{(9-2x)^2} e^{-x}$. Derivatans teckenväxling ger lokalt maximum i $(3/2, 1/4e^{3/2})$ och lokalt minimum i $(3, 1/e^3)$.

2. Volymen är

$$V(k) = 2\pi \int_0^1 x \, \frac{1}{x^k} \, dx = 2\pi \int_0^1 x^{1-k} \, dx = 2\pi \frac{x^{2-k}}{2-k}\Big|_0^1 \text{ då } k \neq 2 \text{ och } = 2\pi \ln x\Big|_0^1 \text{ då } k = 2.$$

Volymen är alltså ändlig för $k < 2$. $V(k) = \dfrac{2\pi}{2-k}$ och $\lim_{k \to -\infty} V(k) = 0$.

Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
H Avelin, A Pelander, K Sigstam

Tentamen del II
ANALYS MN1
2003-12-12

Lösningar

4. Använd variabelbytet $u = e^x$ och få
$$\int_0^\infty \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx = \int_1^\infty \frac{u+1}{u^2+1}\frac{1}{u}\,du.$$
Ansätt sedan partialbråksuppdelningen
$$\frac{u+1}{u(u^2+1)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u}$$
vilket leder till
$$\int_1^\infty \frac{u+1}{u(u^2+1)}\,du = \int_1^\infty \frac{1-u}{u^2+1} + \frac{1}{u}\,du = \int_1^\infty \frac{1}{u^2+1} - \frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{u}\,du =$$
$$= \left[\arctan u - \frac{1}{2}\ln|u^2+1| + \ln|u|\right]_1^\infty = \lim_{R\to\infty}\left[\arctan u + \ln\left|\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right|\right]_1^R =$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left(\arctan R + \ln\frac{R}{\sqrt{R^2+1}} - \left(\arctan 1 + \ln\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + \ln 1 - \frac{\pi}{4} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$
Detta visar att integralen är konvergent.

5. a) Jämförelsetest visar att $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^p \ln n}$ är konvergent ($p > 1$), eftersom $\frac{1}{n^p \ln n} < \frac{1}{n^p}$ för $n \geq 3$, och $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ är konvergent.

b) Då $p < 1$ kan vi välja ett tal $a > 0$ så att $p + a < 1$ (t ex $a = \frac{1-p}{2}$). Från standardgränsvärdet $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^a} = 0$, vet vi att $\ln n < n^a$ för $n > N$ där N är något tillräckligt stort heltal. Alltså är $\frac{1}{n^p \ln n} > \frac{1}{n^p n^a} = \frac{1}{n^{p+a}}$ för $n > N$. Jämförelsetest visar alltså att $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^p \ln n}$ är divergent ($p < 1$), eftersom $\frac{1}{n^p \ln n} > \frac{1}{n^{p+a}}$ för $n > N$, och $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{p+a}}$ är divergent ($p + a < 1$).

c) Låt $f(t) = \dfrac{1}{t\ln t}$ $(t > 1)$. Då f är kontinuerlig, positiv och avtagande och vi har att $f(n) = \dfrac{1}{n\ln n}$ för $n \geq 2$ kan vi använda integraltestet. Eftersom $\int_2^\infty f(t)dt = \int_2^\infty \dfrac{dt}{t\ln t} = [u = \ln t] = \int_{\ln 2}^\infty \dfrac{du}{u}$ är en divergent integral så är $\sum_{n=2}^\infty \dfrac{1}{n\ln n}$ divergent.

6. Lösningarna till *karakteristiska ekvationen* $r^2 - 3r = r(r-3) = 0$ är 0 och 3. Då blir lösningen till den homogena ekvationen

$$y_h = A + Be^{3x}.$$

Termerna i högerledet, 1 och e^{3x}, finns redan i homogena lösningen. Då bör partikulärlösningen y_p ha formen $y_p = x(c + de^{3x})$ där c och d bestäms genom insättning av y_p' och y_p'' i differentialekvationen. Vi vet att $y_p' = c + (1+3x)de^{3x}$ och $y_p'' = (6+9x)de^{3x}$. Insättning ger

$$1 + e^{3x} = y_p'' - 3y_p' = [(6+9x) - (3+9x)]de^{3x} - 3c = 3de^{3x} - 3c$$

Så att $c = -\dfrac{1}{3}$, och $d = \dfrac{1}{3}$, och $y_p = \dfrac{x}{3}(e^{3x} - 1)$. Alltså blir den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = A + Be^{3x} + \frac{x}{3}(e^{3x} - 1).$$

<u>Alternativt</u>: Börja med att integrera båda sidor och få $y' - 3y = x + \dfrac{e^{3x}}{3} + c$. Multiplicering båda sidorna med integrerande faktor e^{-3x} ger $(ye^{-3x})' = (y' - 3y)e^{-3x} = (x+c)e^{-3x} + \dfrac{1}{3}$. Ytterligare integration ger

$$\begin{aligned} ye^{-3x} &= \int (x+c)e^{-3x}dx + \frac{x}{3} + d = -\frac{(x+c)}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{x}{3} + D \\ &= -\frac{3(x+c)+1}{9}e^{-3x} + \frac{x}{3} + D \end{aligned}$$

Alltså

$$y = C + De^{3x} + \frac{x}{3}(e^{3x} - 1) \quad \text{för några godtyckliga konstanter } C \text{ och } D.$$