Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
T Erlandsson

TENTAMEN 2004-01-15
Analys MN1

## SVAR OCH ANVISNINGAR

## FRÅGOR

1. $\frac{1}{2}\ln 2$
2. $\frac{\pi}{2} - 1$
3. $-2$
4. $-1$
5. $y = 1$
6. $y = -\cos x + Ax + B$
7. $y = Ae^x + Be^{-x}$
8. $y = Ae^x + Be^{-x} - 1$
9. $y = Ce^{-x^2} + 1$
10. $y = Cx - 1$ (lätt att t ex separera)
11. $\dfrac{1}{1 - 1/e^2}$
12. $-1 \leq x < 1$
13. $a_2 = -\frac{1}{2}$ $\Big(1/\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + (-\frac{1}{2})x^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$ så $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}, \dots\Big)$
14. $\infty$ (använd kvottestet eller känn igen serien som Maclaurinserien för $e^x$ )
15. $f''(0) = 0$

## SVAR OCH ANVISNINGAR

### Två problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas

1. Definitionsmängden är $x \neq 2$. Vertikal asymptot är $x = 2$ där $\lim_{x \to 2-} y = +\infty$ och $\lim_{x \to 2+} y = -\infty$. Horisontell asymptot är $y = 0-$ då $x \to \pm\infty$. Derivatan har nollställena 1 och $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Teckenväxling ger lokalt maximum för $x = 1$ och lokalt minimum för $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2. Vid kurvritningen är det viktigt att observera att $-x \ln x > 0$ på definitionsmängden och att $\lim_{x \to 0+} y = 0$. Vidare är $y' = -\ln x - 1$ så funktionen har ett maximum för $x = 1/e$. Volymen är

$$V = \pi \int_0^1 x^2 \ln^2 x \, dx = \pi \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x |_0^1 - \pi \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= -\pi \int_0^1 2 \frac{1}{3} x^2 \ln x \, dx = -\pi 2 (\frac{1}{3})^2 x^3 \ln x |_0^1 + \pi \int_0^1 2 (\frac{1}{3})^2 x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \pi \int_0^1 2 (\frac{1}{3})^2 x^2 \, dx = 2\pi (\frac{1}{3})^3.$$

Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
H Avelin, A Pelander, K Sigstam

Tentamen del II
ANALYS MN1
2004-01-15

Lösningar

4.

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x)^2+1}\,dx < \int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x)^2} = \int_0^\infty e^{-x} < \infty.$$

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x)^2+1}\,dx = \tan^{-1} e^x|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

eller

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x)^2+1}\,dx = [e^x = u, e^x\,dx = du] = \int_1^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u|_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

5. a) Jämförelsetest visar att $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ är divergent ($p \leq 1$) eftersom $\frac{\ln n}{n^p} > \frac{1}{n^p}$ för $n \geq 3$ och $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ är divergent ($p \leq 1$).

   b) Då $p > 1$ kan vi välja ett tal $a > 0$ så att $p = 1 + a + a$. Från standardgränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0$, vet vi att $\ln n < n^a$ för $n > N$ där $N$ är något tillräckligt stort heltal. Alltså är $\frac{\ln n}{n^p} = \frac{\ln n}{n^a}\frac{1}{n^{1+a}} < \frac{1}{n^{1+a}}$ för $n > N$ och då serien $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}}$ är konvergent visar jämförelsetestet att också den givna serien är konvergent.

6. <u>Lösning</u>: Eftersom $xy' = 1 + x - y - xy = (1-y)(x+1)$ är ekvationen är separabel, dvs

$$\frac{dy}{1-y} = \frac{(1+x)dx}{x}, \text{ för } x \neq 0 \text{ och } y \neq 1.$$

Integrering ger $-\ln|1-y| = (x+c) + \ln|x|$, för något godtyckligt $c$. En förenkling av detta ger

$$y = \frac{Cxe^x - 1}{Cxe^x}, \text{ där } |C| = e^c.$$