Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

TENTAMEN 2004-12-15
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

FRÅGOR

1. $\ln 2$
2. 1
3. 1
4. $-\dfrac{1}{3}$
5. $x = 1$
6. $y = -\sin x + 2x + 1$
7. $y = \sin x + \cos x$
8. $y = e^{-x} + 2e^{x} - 2$
9. $y = 1$
10. $y = \sqrt{1 + x^2}$
11. $\dfrac{1}{1 - x_0}$
12. $0 \leq x < 2$
13. 1
14. $a_2 = 3$
15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$

SVAR OCH ANVISNINGAR

Två problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas

1. Definitionsmängden är $x > 0$. Nollställe är $x = 1/e$. Vertikal asymptot är y-axeln där $\lim_{x\to 0+} y = -\infty$. Horisontell asymptot är $y = 0$ där $\lim_{x\to\infty} y = 0+$. Derivatan $y' = -\frac{1}{x^2}\ln x$ som har det enda nollstället $x = 1$. Detta tillsammans med asymtoterna ger att $f(1) = 1$ är funktionens största värde enligt Adams gåva. Andra derivatan $y'' = \frac{2\ln x - 1}{x^3} = \frac{\ln x^2 - 1}{x^3} = 0$ för $x = \sqrt{e}$ som ger en inflexionspunkt då y'' har teckenväxling här.

2. Volymen är
$$V(k) = -2\pi \int_0^1 x^{k+1} \ln x \, dx.$$
Vi beräknar $\int_0^1 x^{k+1} \ln x \, dx$.

Om $k = -2$ blir $\int_0^1 x^{k+1} \ln x \, dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2}\ln^2 x \Big|_0^1 = -\infty$. Då $k \neq -2$ använder vi partiell integration och får
$$\int_0^1 x^{k+1} \ln x \, dx = \frac{x^{k+2}}{k+2} \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{k+2}}{k+2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^{k+2}}{k+2} \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+2} \, dx =$$
$$= \frac{x^{k+2}}{k+2} \ln x \Big|_0^1 - \frac{x^{k+2}}{(k+2)^2} \Big|_0^1 dx = -\frac{1}{(k+2)^2}, \; k > -2.$$
Vi har speciellt utnyttjat att $\lim_{x\to 0+} x^{k+2} \ln x$ existerar ändligt $(= 0)$ om och endast om $k > -2$. Hela utredningen visar att volymen är ändlig endast för $k > -2$ och att
$$V(k) = \frac{2\pi}{(k+2)^2}.$$

Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
H Avelin, H Uscka-Wehlou

Tenta del 2 - lösningarna
ANALYS MN1
2004-12-15

1. Taylorpolynomet av grad n för en funktion $f(x)$ kring punkten $x = c$ är:
$p(f,n,c,x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i.$

   Vi kan beräkna med hjälp av den formeln Taylorpolynomet av grad 4 för $f(x) = e^x$ och $c = 0$ på följande sätt:
   Om $f(x) = e^x$, då gäller $f^{(n)}(x) = e^x$ för alla $n = 1, 2, ...$, alltså $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ för $n = 1, 2, ...$ Eftersom vi också har $f(0) = e^0 = 1$, kan vi substituera $c = 0$ och $f(x) = e^x$ i den allmänna formeln och få:

$$\begin{aligned} p(e^x, 4, 0, x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}. \end{aligned}$$

2. Om (a_n) är en talföljd och $a_n \in \mathbf{R}$ för alla $n = 0, 1, 2, ...$, då är

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

   en formell summa av oändligt många termer.

   Låt $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Då kallas S_n den n:te delsumman av serien.

   Man säger att serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerar om $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, alltså om talföljden av delsummorna konvergerar mot $S \in \mathbf{R}$. Då skriver man $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

   Om $\lim_{n\to\infty} S_n$ inte är ett reellt tal, då säger man att serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är divergent.
   Om $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, då kan man säga att serien divergerar mot oändligheten.

-Vänd-

Här är lösningen klar, men vi ger också några exempel:

- serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ är **konvergent**. Detta är en geometrisk serie och det gäller för delsummorna att $S_n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^n = \dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \overset{n\to\infty}{\to} 2$, alltså $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 2$.
- serie $\sum_{n=0}^{\infty} n$ är **divergent mot oändligheten**, eftersom
  $S_n = 0 + 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, alltså $\sum_{n=0}^{\infty} n = \infty$.
- serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ är **divergent** (men alltså inte ”mot oändligheten”), eftersom (S_n) är divergent (har två delföljder med olika gränsvärden: $S_{2n+1} = 0$ och $S_{2n} = 1$ för $n = 0, 1, 2, ...$).

3.

$$\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x} dx =)$$

Först utför vi partiell integration med $f(x) = \arctan(e^x)$ och $g'(x) = e^{-x}$ (alltså $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ och $g(x) = -e^{-x}$). Då får vi:

$$(= -e^{-x} \cdot \arctan(e^x) + \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx =)$$

För att beräkna den sista integralen, utför vi substitution $1 + e^{2x} = t$, alltså $e^{2x} = t - 1$ (vilket implicerar att både t och $t - 1$ är positiva och vi slipper absolutbelopp när vi tar logaritmen), $x = \frac{1}{2}\ln(t-1)$, $dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} dt$:

$$(= -e^{-x} \cdot \arctan(e^x) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t(t-1)} dt =)$$

Nu utför vi partialbråksuppdelning av $\dfrac{1}{t(t-1)}$. Vi använder sats 1 på sidan 371 i Adams.
Vi letar efter konstanter A och B så att för alla $t \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ gäller $\dfrac{1}{t(t-1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t-1}$.
Vi beräknar $A = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t-1} = -1$ och $B = \lim_{t\to 1} \dfrac{1}{t} = 1$.
OBS. Man kan också beräkna A och B från ekvationssystemet $A + B = 0,\ -A = 1$, vilket man får då man jämför koefficienterna i polynomen $p(t) = 1$ och $q(t) = t(A + B) - A$ efter additionen av $\dfrac{A}{t}$ och $\dfrac{B}{t-1}$.

Nu kan vi använda $-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}=\frac{1}{t(t-1)}$ i integralen:

$$(= -e^{-x}\cdot\arctan(e^x)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}dt = -e^{-x}\cdot\arctan(e^x)-\frac{1}{2}\ln t+\frac{1}{2}\ln(t-1)+C =$$

$$= -e^{-x}\cdot\arctan(e^x)-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+\frac{1}{2}\cdot 2x+C = -e^{-x}\cdot\arctan(e^x)-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+x+C.$$

4. Från existensen av andraderivatan i alla $x \in I$ följer att både f och f' är deriverbara (derivatans definition) och kontinuerliga (sats 1 på sidan 112 i Adams) i I.
Vi väljer tre skilda nollställen till f i I (vi vet att det finns minst tre) och kallar dem för $x_1,\ x_2,\ x_3$ i växande ordning, alltså $x_1 < x_2 < x_3$.
Eftersom f är kontinuerlig och deriverbar i I, är den också kontinuerlig och deriverbar i de slutna ändliga, intervallen $[x_1, x_2] \subset I$ och $[x_2, x_3] \subset I$. Eftersom alla nödvändiga villkor är uppfyllda, kan vi använda medelvärdessatsen (sats 11 på sidan 133 i Adams) för f. Enligt satsen finns det $c_1 \in (x_1, x_2)$ och $c_2 \in (x_2, x_3)$ så att:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2),$$

vilket implicerar, (eftersom $x_1,\ x_2,\ x_3$ är nollställen till f, alltså $f(x_1) = 0,\ f(x_2) = 0,\ f(x_3) = 0$) att:

$$f'(c_1) = 0, \quad f'(c_2) = 0.$$

Eftersom $c_1 \in (x_1, x_2)$ och $c_2 \in (x_2, x_3)$ (alltså $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3$) så gäller $c_1 \neq c_2$.
Eftersom andraderivatan är derivatan till förstaderivatan och förstaderivatan är kontinuerlig och deriverbar i I, kan vi tillämpa samma sats igen, den här gången för f' på det slutna, ändliga intervallet $[c_1, c_2] \subset I$ och få att det finns $c \in (c_1, c_2)$ så att

$$\frac{f'(c_2) - f'(c_1)}{c_2 - c_1} = f''(c)$$

och eftersom $f'(c_1) = 0$ och $f'(c_2) = 0$ så gäller $f''(c) = 0$.
Eftersom $c \in (c_1, c_2) \subset I$, har vi då bevisat att f'' har minst ett nollställe i I.