Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

TENTAMEN 2005-01-14
Analys MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

FRÅGOR

1. $\frac{2}{3}$
2. 1
3. 1
4. $\frac{1}{2}$
5. x-axeln
6. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$
7. $y = \sin x + 1$
8. $y = xe^x + 1$
9. $y = 2e^x - 1$
10. $y = \sqrt{2x+1}$
11. $\frac{1}{1+x_0}$
12. 1
13. $x = 0$
14. $\frac{2}{3}$
15. $a_2 = \frac{1}{2}$

Två problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas

1. Definitionsmängden är $x > 0$. Nollställe är $x = 1$. Vertikal asymptot är y-axeln där $\lim_{x\to 0+} y = +\infty$. Horisontell asymptot är $y = 0$ där $\lim_{x\to\infty} y = 0+$.

$$y' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{\ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$$

med nollställena $x = 1$ och $x = e^2$. Då $y(x) \geq 0$ alla $x > 0$ är $y(1) = 0$ givetvis funktionens minsta värde. Adams gåva på intervallet $]1, \infty[$ ger att $y(e^2) = 4/e^2$ är största värdet till höger om $x = 1$. För funktionen som helhet är det dock ett lokalt maximum.

$$y'' = 2 \cdot \frac{1}{x^3} - 2\ln x \cdot \frac{2}{x^3} - 2\ln x \cdot \frac{1}{x^3} + 2\ln^2 x \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}(\ln^2 x - 3\ln x + 1)$$

Nollställena för y'' ges av de x för vilka $\ln x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Detta ger inflexionspunkter ty y'' har teckenväxling här. Inflexionspunkternas lägen i förhållande till de lokala extrempunkterna ges av att $0 < \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} < 2 < \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

2. Låt $I(a) = \displaystyle\int_0^1 x^a\, e^{-x}\, dx$. Ett lösningsförslag är att använda Theorem 3 i Adams Ch 6.5, “A comparison theorem for integrals” samt Theorem 2 om “p-integrals” i samma avsnitt. Vi har olikheten $0 < x^a e^{-x} < x^a$ på intervallet $]0, 1]$. Eftersom $\displaystyle\int_0^1 x^a\, dx$ är konvergent för $a > -1$ är alltså $I(a)$ konvergent om $a > -1$.

   Vi har även olikheten $x^a e^{-x} \geq e^{-1} x^a > 0$ på intervallet $]0, 1]$. Eftersom $\displaystyle\int_0^1 x^a\, dx$ är divergent för $a \leq -1$ är alltså $I(a)$ då också divergent. Därmed är $I(a)$ konvergent endast om $a > -1$.

Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
H Avelin, H Uscka-Wehlou

Tenta del 2 - lösningarna
ANALYS MN1
2005-01-14

1. **Integralkalkylens huvudsats**:
Antag att en funktion f är kontinuerlig på ett intervall I och låt $a \in I$.

   - vi definierar följande funktion $F : I \to \mathbf{R}$:
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$
Då är F deriverbar i I och $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$. Alltså, F är en primitiv funktion till f i I:
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$
   - om $G(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ i I, alltså $G'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$, då har vi för alla $b \in I$:
$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

   OBS: beviset hittar du i Adams, p. 328.

2. Satserna om konvergens av p-integraler och p-serier:

   - **satsen om konvergens av p-integraler**
Om $0 < a < \infty$, då:
a)
$$\int_a^\infty x^{-p}dx \begin{cases} \text{konvergerar mot } \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & \text{om } p > 1 \\ \text{divergerar mot oändligheten} & \text{om } p \leq 1. \end{cases}$$
b)
$$\int_0^a x^{-p}dx \begin{cases} \text{konvergerar mot } \dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{om } p < 1 \\ \text{divergerar mot oändligheten} & \text{om } p \geq 1. \end{cases}$$
   - **satsen om konvergens av p-serier**
$$\sum_{n=1}^\infty n^{-p} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konvergerar} & \text{om } p > 1 \\ \text{divergerar mot oändligheten} & \text{om } p \leq 1. \end{cases}$$

-Vänd-

Man kan härleda satsen om p-serier (bara för $p > 0$) ur den om p-integraler (ur satsens första del, med $a = 1$) genom att använda integraltestet (sats 8 på sidan 535 i Adams). För $p > 1$ och $0 < p \leq 1$ jämför vi p-serier $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ med motsvarande p-integraler $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$.
Man kan använda integraltestet eftersom $f(x) = x^{-p}$ är positiv, kontinuerlig och avtagande över $[1, \infty)$ om $p > 0$.
För $p \leq 0$ är det nödvändiga villkoret för konvergensen (sats 4 på sidan 532 i Adams) inte uppfyllt för p-serierna, ty $\lim_{n\to\infty} n^{-p} \neq 0$, alltså är serierna för $p \leq 0$ divergenta (divergenta "mot oändligheten", ty alla seriernas element är positiva).

3. För att avgöra om serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ är konvergent eller divergent, använder vi kvottestet:

$$a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3^n \cdot n!}{(n+1)^n} \cdot \frac{3(n+1)}{n+1} = 3 \cdot \frac{3^n \cdot n!}{(n+1)^n},$$

alltså:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \cdot \frac{3^n \cdot n!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{3}{(\frac{n+1}{n})^n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{3}{e},$$

(vi har använt att $\lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n = e$). Eftersom $0 < e < 3$, då gäller det att $\frac{3}{e} > 1$ och kvottestet säger då att serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ är divergent.

4. Vi ska bestämma ett polynom $p(x)$ av grad högst 3, sådant att följande funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ blir deriverbar för alla x:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ p(x) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1. \end{cases}$$

Vi ansätter $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ och ska beräkna $a,\ b,\ c$ och d.
Eftersom alla polynomen är deriverbara i alla $x \in \mathbf{R}$, räcker det att kolla för vilka värden av parametrar $a,\ b,\ c$ och d funktion f är deriverbar i $x = 0$ och $x = 1$. Detta innebär 4 villkor: kontinuiteten av f i $x = 0$ och $x = 1$ (eftersom deriverbarhet implicerar kontinuitet - se sats 1 på sidan 112 i Adams), alltså $p(0) = 0$ och $p(1) = 1$ (jämför höger- och vänstergränsvärden i $x = 0$ och i $x = 1$!) och deriverbarheten av f i $x = 0$ och $x = 1$, vilket betyder att:

- högerderivatan av f i $x = 0$ (alltså högerderivatan av p i $x = 0$) måste vara lika med vänsterderivatan av f i $x = 0$. Vänsterderivatan är noll, eftersom f är konstant för $x < 0$.
- vänsterderivatan av f i $x = 1$ (alltså vänsterderivatan av p i $x = 1$) måste vara lika med högerderivatan av f i $x = 1$. Högerderivatan är noll, eftersom f är konstant för $x > 1$.

OBS: Det går bra att beräkna högerderivatan och vänsterderivatan av p enligt vanliga formeln för derivatan av polynomen, eftersom extensionen av p över hela $\mathbf{R}$, d.v.s. polynomet $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ är deriverbar i hela $\mathbf{R}$ och $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, alltså vänster- och högerderivator i varje punkt beräknas också enligt formeln. Detta gäller också för restriktionen av P till intervallet $[0, 1]$, vilket är p.

Vi har alltså $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ och $p'_+(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $p'_-(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (där p'_+ och p'_- är beteckningar för höger- resp. vänsterderivator av p) och vi kan skriva ner alla 4 villkor på följande sätt (villkoren för f:s kontinuitet i två första rader av det första ekvationssystemet och villkoren för f:s deriverbarhet i två sista rader):

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p(1) = 1 \\ p'_+(0) = 0 \\ p'_-(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3, \end{cases}$$

vi fick alltså $a = -2$, $b = 3$, $c = 0$ och $d = 0$, vilket ger lösningen till problemet:

$$p(x) = -2x^3 + 3x^2.$$

Här är vi färdiga med att lösa uppgiften, men du får gärna fundera vidare på följande:
Försök att visa att grad 3 är den minsta möjliga graden av p för att uppgiften skulle ha en lösning. Visa alltså att grader 1 och 2 inte duger. Du kan lösa uppgiften genom att ställa upp och lösa ekvationssystemen för polynomen av grad 1 och av grad 2 som vi just gjorde för grad 3 (och dom är överbestämda - vi har mera ekvationer än obekanta). Men du kan också skissera en grafik av f och försöka att "passa in" ett polynom på intervallet $[0, 1]$. För graden 1 hittar du lätt $p(x) = ax + b$ så att f utbrett genom p på $[0, 1]$ blir kontinuerlig, men är funktionen också deriverbar? För graden 2 kan du svara på följande fråga: "kan derivatan av $p(x) = ax^2 + bx + c$ ha TVÅ nollställen? Motivera."
Om graden är 3, får vi exakt en lösning. Varför?
Om graden är däremot större än 3, då får vi mera än en (t.o.m. oändligt många!) lösning(ar) till problemet. Varför? Vilket sort ekvationssystem får man då? (se kursen linjär algebra!).