Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

VACKRA PROBLEM

Sfärisk geometri

Enligt I. 18 gäller för en triangel ABC i absolut geometri att om t.ex $AC > AB$ så är $\wedge B > \wedge C$. I beviset av denna sats användes I. 16. Denna proposition gäller dock inte för alla sfäriska trianglar. I. 18 däremot är faktiskt sann inte bara för trianglar i absolut geometri utan också för alla sfäriska trianglar. Om vi önskar bevisa detta kan vi förstås inte använda I. 16. Man kan nu göra en intressant observation. För att bevisa I. 18 räcker det att utnyttja en svagare version av I. 16, nämligen följande

PROP. I. $16''$. För alla trianglar i absolut geometri samt för alla sfäriska trianglar med innervinklarna α_1, α_2 och α_3 gäller att

$$\pi - \alpha_3 > \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{etc.}$$

1. Bevisa I. $16''$.

   Ledning: Arean av en sfärisk triangel är $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$.

   Anm. I. $16''$ följer trivialt från I. 16 i absolut geometri. Det svåra är att bevisa I. $16''$ för sfäriska trianglar. Varje innervinkel i en sfärisk triangel antas vara mindre än π.

2. Använd I. $16''$ för att bevisa att I. 18 också gäller för sfäriska trianglar. Bevisa sedan att även I. 19 och I. 20 gäller för sfäriska trianglar.

3. Visa att [I. 26, $V - S - V$] gäller för sfäriska trianglar. Ge exempel på sfäriska trianglar som inte uppfyller [I. 26, $S - V - V$].

4. Gäller I. 24 och I. 25 generellt för sfäriska trianglar? Ge bevis eller motexempel.