F11 – Två stickprov

Måns Thulin

Uppsala universitet
thulin@math.uu.se

Statistik för ingenjörer • 26/2 2013

Dagens föreläsning

- Konfidensintervall när man har ihopparade stickprov
- Att väga samman skattningar
- Konfidensintervall när man har två oberoende stickprov
  - För $\mu_x - \mu_y$
  - För $p_1 - p_2$

Stickprov i par

I många situationer där man har samlat in två datamaterial har man studerat samma *försöksenheter* (personer, föremål...) under olika förutsättningar, som man vill jämföra.

I sådana situationer kan man utnyttja att observationerna hör ihop parvis när man vill konstruera konfidensintervall för skillnaden mellan resultaten under de olika förutsättningarna.

Exempel: dragstyrkan hos en viss typ av metallstänger undersöks. Stängerna klyvs i två delar och den ena delen utsätts för en härdande behandling. Man mäter sedan dragstyrkan för bägge delarna och vill få ett konfidensintervall för skillnaden mellan dragstyrkan före och efter härdningen.

- Se tavlan!

Oberoende stickprov: att väga ihop skattningar

I en stad finns två sjukhus som oberoende av varandra har undersökt hur vanlig en viss sjukdom är. Det första sjukhuset undersökte $n_1 = 500$ patienter och fann att $x_1 = 52$ led av sjukdomen.

Det andra sjukhuset undersökte $n_2 = 750$ personer och fann $x_2 = 87$. Alla personer antas vara oberoende av varandra och sjukhusen undersökte samma population.

(a) Ange punktskattningar av andelarna p_1 och p_2 för respektive sjukhus.

(b) Det är rimligt att anta $p_1 = p_2 = p$. Hur ska p skattas? Två förslag ges: antingen $\frac{1}{2}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)$ eller $(500\hat{p}_1 + 750\hat{p}_2)/1250$. Vilket av dessa är bäst?

Sammanvägd variansskattning

Givet ett stickprov $x_1, \dots, x_n$ från en fördelning med varians σ^2 är

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Men hur gör vi om vi vill skatta variansen givet flera stickprov?

Antag att vi har två stickprov $x_1, \dots, x_{n_x}$ och $y_1, \dots, y_{n_y}$, av storlek n_x respektive n_y, från fördelningar med samma varians σ^2 men olika väntevärden μ_x och μ_y.
Man kan då visa att den sammanvägda variansskattningen s_p^2 (p kommer från engelskans *pooled*) är väntevärdesriktig:

$$s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{(n_x - 1) + (n_y - 1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_x} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_y} (y_i - \bar{y})^2}{n_x + n_y - 2},$$

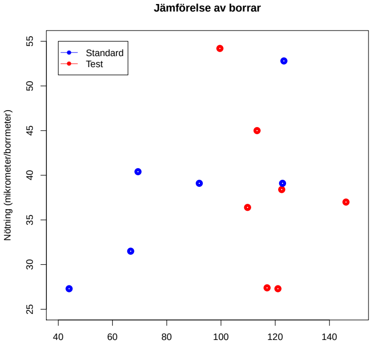
Om man har tre stickprov med samma varians så blir den sammanvägda skattningen istället

$$s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2 + (n_z - 1)s_z^2}{(n_x - 1) + (n_y - 1) + (n_z - 1)} \qquad \text{och så vidare...}$$

Oberoende stickprov: jämförelse av två datamaterial

Ett svenskt företag utvecklar gruvborrar och vill jämföra två olika material för hårdmetallstift på borrkronor. Man gör provborrningar i en gruva, dels med det material som används idag och dels med det nya testmaterial som man utvecklat.

Vid provborrningarna mäter man dels hur långt man lyckas borra (borrmeter) och dels nötningen på stiften (i mikrometer/borrad meter).

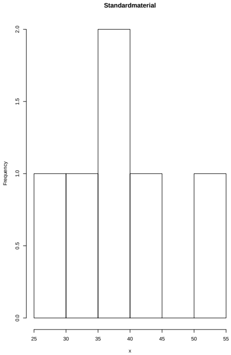


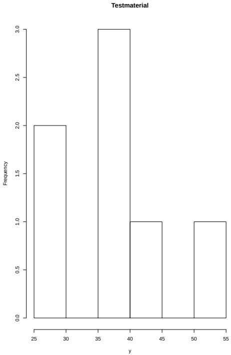
Jämförelse av två datamaterial

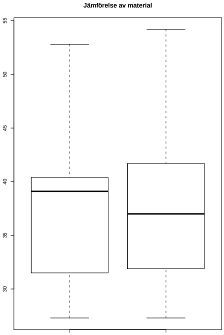
Man vill nu undersöka om nötningen per borrad meter skiljer sig åt mellan de två materialen.

Standard	1	2	3	4	5	6
Borrmeter (m)	44.0	123.2	66.7	122.7	69.4	92.0
Nötning (μm/m)	27.3	52.8	31.5	39.1	40.4	39.1

Test	1	2	3	4	5	6	7
Borrmeter (m)	109.8	113.3	122.4	99.6	146.1	121.0	117.0
Nötning (μm/m)	36.4	45.0	38.4	54.2	37.0	27.3	27.4







Jämförelse av två datamaterial

Modell: utifrån histogrammen och lådagrammen på förra sidan så verkar följande modell någorlunda rimlig.

Låt $X_1, \ldots, X_6$ vara mätningarna för standardmaterialet och antag att $X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ samt att mätningarna är oberoende.

Låt $Y_1, \ldots, Y_7$ vara mätningarna för standardmaterialet och antag att $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$ samt att mätningarna är oberoende.

För standardmaterialet får man $\bar{x} = 38.37$ och $s_x^2 = 76.63$.
För testmaterialet får man $\bar{y} = 37.96$ och $s_y^2 = 90.33$.

Hur kan vi utifrån detta få fram ett konfidensintervall för $\mu_X - \mu_Y$? Hur kan vi skatta σ^2?

Skillnader i väntevärde

Konfidensintervallet för skillnaden $\mu_x - \mu_y$ är

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}^{(n_1+n_2-2)} s_p \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}$$

- Se borrexempel på tavlan!

Skillnader i andelar

Ett företag som tillverkar solcellskomponenter genomför en kvalitetskontroll av 400 slumpmässigt utvalda komponenter och finner att 20 av dessa är undermåliga.

De anser att andelen undermåliga komponenter är för hög och genomför därför en rad förändringar i tillverkningsprocessen.

Efter förändringarna tas ett nytt stickprov om 400 komponenter. Av dessa är 12 stycken undermåliga.

Har förändringarna lett till att andelen undermåliga komponenter har minskat?

Skillnader i andelar

Vi vill jämför två andelar p_1 och p_2 givet en observation vardera av $X_1 \sim Bin(n_1, p_1)$ och $X_2 \sim Bin(n_2, p_2)$.

Ett konfidensintervall för differensen $p_1 - p_2$ med approximativ konfidensgrad $1 - \alpha$ ges av

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}.$$

Här krävs att de två tumreglerna $\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)n_1 > 10$ och $\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)n_2 > 10$ ska vara uppfyllda för att intervallet ska få användas.

- Se solcellskomponentexempel på tavlan!