28/1-13 • Statistik för ingenjörer • Föreläsning 3

4) Kö på Ica

Antag att det finns tre kassor, A, B och C, samt att det är lika sannolikt att var och en av dessa är snabbast. Då är P("en annan kö är snabbare") = 2/3.

Ett mer komplicerat sätt att se detta är att räkna hur många möjliga "snabbhets-ordningar" det finns (från snabbast till långsammast):

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Alla är lika sannolika ($\frac{1}{6}$) men min kö (A) är bara snabbast 1/3 av gångerna.

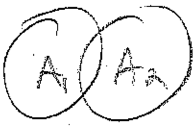
Maskinen

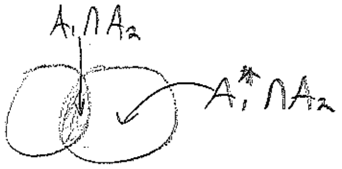
Låt A_i = "den i:te komp. som tillverkas är def."

Då är

$P(A_1) = \frac{1}{10}$, $P(A_2 | A_1) = \frac{1}{5}$, $P(A_2 | A_1^*) = \frac{1}{10}$.

Vi söker $P(A_2)$. A_2 kan inträffa på två oförenliga sätt: antingen efter A_1 eller efter A_1^*.





å $P(A_2) =$

oförenliga sätt

$$P((A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap A_1^*)) \overset{\downarrow}{=} P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^*)$$

$$P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) + P(A_1^*) \cdot P(A_2 | A_1^*) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{11}{100}$$

④ Pappan

Man kan ha 2 barn på 4 olika vis:

♀ ♀	♀ ♂	♂ ♀	♂ ♂
flicka äldst flicka yngst	flicka äldst pojke yngst	pojke äldst flicka yngst	pojke äldst pojke yngst

Alla 4 vis är (approximativt) lika sannolika.

Informationen "minst en flicka" innebär att vi befinner oss i någon av de rödmarkerade situationerna. Dessa är alla lika sannolika, så $P(♀♀ \mid \text{minst en } ♀) = 1/3$.

---

⑦ Binomialfördelning

Vad är $P(X=k)$?

Måste se ut som $r \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, där

r = antal sätt som man kan få $X=k$ på.

(Jmfr pappan-exemplet!)

r = antal sätt som man kan välja ut k stycken bland n möjliga.

Ex. $n=5$, $k=2$. Välj ut 2 av 5 personer.

Vi kan välja första personen på 5 vis och andra personen på 4 vis. Totalt $5 \cdot 4$ vis.

Men om vi först väljer Dolph och sen Arnold så är det samma sak som att först välja Arnold och sedan Dolph!

De två vi valt kan ordnas på $2 \cdot 1 = 1$ sätt.

Så $r = \frac{5 \cdot 4}{2}$.

Obs! $\frac{5\cdot 4}{2} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} \cdot \frac{1}{2\cdot 1}$

Låt $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \cdots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$ $\qquad r = \frac{5!}{3!2!}$
utläses "n fakultet"

Allmänt kan man välja ut k stycken bland n möjliga på

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ vis $\qquad$ Vi definierar $0! = 1$.
utläses "n över k"

Så $\quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Ex, Man slår en tärning 4 ggr.
X = antal sexor.
Då är $X \sim Bin(4, \frac{1}{6})$ och

$P(X=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{4!}{4!0!}\cdot 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48$

$P(X=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1-\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4!}{3!1!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}39$

$P(X\geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X\leq 1) = 1 - \big(P(X=0) + P(X=1)\big)$

$\approx 1 - (0{,}48 + 0{,}39) = 0{,}13$.

9 Paul

Paul tippade bara vinnande lag, så vi bortser från oavgjorda matcher. Om man tippar på måfå så är $P(\text{"tippa rätt"}) = \frac{1}{2}$.

X = antal rätt i VM -10, $n = 8$ matcher, $X \sim Bin(8, \frac{1}{2})$

$$P(X=8) = \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(1-\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{8!}{0!\,8!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} \approx 0{,}0039.$$

Låt nu Y = antal rätt i EM -08. $Y \sim Bin(6, \frac{1}{2})$.
X och Y är ober, så om $Z = X + Y$ så är $Z \sim Bin(14, \frac{1}{2})$ enligt kafferastegenskapen.

$$P(Z \geq 12) = P(Z=12) + P(Z=13) + P(Z=14)$$

$$= \binom{14}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} + \binom{14}{13} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} + \binom{14}{14} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} = \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \cdot \Bigg(\underbrace{\binom{14}{12}}_{91} + \underbrace{\binom{14}{13}}_{14} + \underbrace{\binom{14}{14}}_{1}\Bigg)$$

$$= \frac{106}{16384} \approx 0{,}0065.$$

---

12 Ex. Hajattacker

Låt X = antal hajattacker i Florida under ett år och antag att $X \sim Po(2)$. Då är

$$P(X=3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = \frac{8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot e^{-2} = \frac{4}{3} e^{-2} \approx 0{,}18$$

(13) Låt X = antal sprickor.

I genomsnitt 0.1 spricka/m^3. Blocket är 5 m^3, så ett sådant block har i genomsnitt

$0.1 \cdot 5 = 0.5$ sprickor.

Modell: $X \sim Po(0.5)$. $P(X=k) = \frac{0.5^k}{k!} e^{-0.5}$

Sökt: $P(X \leq 2)$

$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= \frac{0.5^0}{0!} e^{-0,5} + \frac{0,5^1}{1!} e^{-0,5} + \frac{0.5^2}{2!} e^{-0,5}$

$= e^{-0,5} + 0{,}5e^{-0,5} + \underbrace{\frac{0.25}{2}}_{0{,}125} e^{-0.5} = \underbrace{(1+0{,}5+0{,}125)}_{1{,}625} e^{-0,5} \approx 0{,}986.$

---

(15) Verkar $X \sim Po(m)$ rimligt?

Vad påverkar m?

- Tid på dagen
- Hur länge man är på stan
- Veckodag
- Hur många man känner
- Hur ofta ens vänner är på stan
- osv...

(10) Antalet hajattacker på ett år i Florida

Låt X = antal attacker och antag att

$X \sim Po(2)$. Då är

$$P(X=0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-2} \approx 0{,}135$$

$$P(X=5) = \frac{2^5}{5!} e^{-2} = \frac{32}{120} e^{-2} \approx 0.036$$

---

(15) Vi antar att $P(2 \text{ pers. fyller samma dag}) = \frac{1}{365}$.

Den första personen vi frågar kan "paras ihop" med 109 andra personer. Den andra vi frågar kan paras ihop med 108 andra personer. Den tredje med 107... och så vidare. "Approximativt oberoende"

Sammanlagt finns det $\sum_{k=1}^{109} (110-k) = 5995$ par av personer här inne!

Så om X är antalet "födelsedagspar"

så är $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{åtminstone} \\ \text{approximativt}}}{X \sim} \mathrm{Bin}(5995, 1/365) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{n>10,\ p<0.1}}}{\approx} Po\left(\frac{5995}{365}\right) = Po(16.4)$

Alltså är $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0)$

$$= 1 - \frac{16.4^0}{0!} e^{-16.4} = 1 - e^{-16.4} = 0.999\ 999\ 924\ldots$$

Om man är $n = 23$ personer så finns $22+21+20+\ldots+1 = 253$ möjliga par. $X \approx Po\left(\frac{253}{365}\right)$ och $P(X \geq 1) = 1 - e^{-253/365} = 0{,}500\ 0077\ldots$