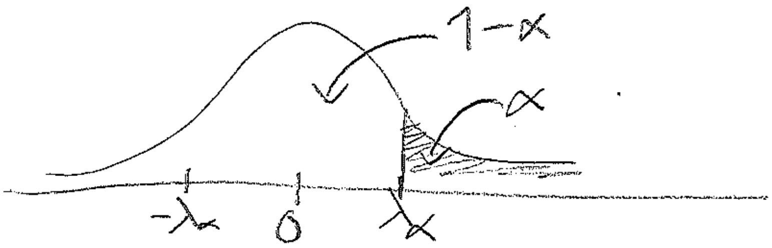
18/2-13 · Statistik för ingenjörer · Föreläsning 9

(8) Kvantiler

Normalfördelningen $N(0,1)$



Då $X \sim N(0,1)$ är λ_α det tal sådant att $P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$.

λ_α kallas för α-kvantilen för $N(0,1)$.

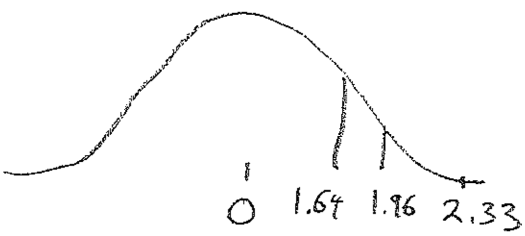
Det gäller att $\lambda_{1-\alpha} = -\lambda_\alpha$, pga symmetri.

Tabell s.130 ger:

$\lambda_{0.05} = 1.64$

$\lambda_{0.025} = 1.96$

$\lambda_{0.010} = 2.33$



(9) Vill hitta a och b s.a. $P(a \le \mu \le b) = 1-\alpha$.

Vet att $P(-\lambda_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \lambda_{\alpha/2}) = 1-\alpha$.

$$-\lambda_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \lambda_{\alpha/2} \iff -\lambda_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}-\mu \le \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\iff -\lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X} \le -\mu \le \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}$$

$$\iff \bar{X} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Så μ ligger i intervallet

$\bar{X} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ med sannolikhet $1-\alpha$!

Ex. Kullager

$\bar{x} = 2.993$, antag $\sigma = 0.05$ känd.

$n = 15$

Tag $\alpha = 0.05$.

Då är $\alpha/2 = 0.025$ och tabellen ger att $\lambda_{0.025} = 1.96$.

Så $I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{15}} = 2.993 \pm 1.96 \cdot \frac{0.05}{\sqrt{15}}$

$\approx (2.97, 3.02)$

---

(10) $I_\mu = (\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, x + \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$= (19.778 - 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}, 19.778 + 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}})$

$= (18.5, 21.0)$

μ	18.5	19.778	21.0
$P(X > 24)$	0.003	0.017	0.067

(13) Beräkningarna är desamma som vid (18), med σ ersatt av s och $\lambda_{\alpha/2}$ ersatt av $t_{\alpha/2}(n-1)$:

för t-fördelningen gäller också att $t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$

$$I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ex, <u>kullager</u>

$s^2 = 0{,}00285 \Rightarrow s \approx 0.0534$

$t_{0{,}025}(14) = 2{,}14$

$$I_\mu = 2{,}993 \pm 2{,}14 \cdot \frac{0{,}0534}{\sqrt{15}} \approx (2{,}96, 3{,}02)$$

Intervallet blir bredare, eftersom osäkerheten blir större när vi måste skatta σ^2.

Ex. från (10) $n=10$

(13) $\bar{x}=19.778$, $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i-19.778)^2$

$=6.496\ldots \Rightarrow s\approx 2.549$

$-t_{\alpha/2}^{(9)} \le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{10}} \le t_{\alpha/2}^{(9)} \iff$

$\bar{X}-t_{\alpha/2}^{(9)}\cdot\frac{S}{\sqrt{10}} \le \mu \le \bar{X}+t_{\alpha/2}^{(9)}\cdot\frac{S}{\sqrt{10}}$

$I_\mu=\bar{x}\pm t_{\alpha/2}^{(9)}\cdot\frac{s}{\sqrt{10}}$

Tag $\alpha=0.05$ dvs 95% konfidensgrad.

$t_{0.025}^{(9)}=2.26$

$I_\mu=19.778\pm 2.26\cdot\frac{2.549}{\sqrt{10}}\approx(17.96, 21.60)$

μ	17.96	21.60
$P(X>24)$	0.001	0.115

Datorchipexemplet: $I_\mu=\bar{x}\pm\lambda_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$ har approximativ konf.grad
(15) $1-\alpha$ (pga CGS!)

Ta $\alpha=0.10$. $\lambda_{0.05}=1.64$.

$I_\mu=\bar{x}\pm\lambda_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=15.2\pm 1.64\cdot\frac{\sqrt{19.5}}{\sqrt{25}}\approx(13.75, 16.65)$

12 finns ej i intervallet $\Rightarrow$ vi tror att $\mu>12$

---

9) $\hat{p}=\frac{12}{100}=0.12$, $1-\hat{p}=0.88$, $n=100$

$I_p=\hat{p}\pm\lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Ta $\alpha=0.05$, $\lambda_{0.025}=1.96 \Rightarrow$

$I_p=0.12\pm 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.12\cdot 0.88}{100}}\approx(0.056, 0.184)$

0.10 finns i intervallet $\Rightarrow$ vi har inga statistiska