

KNUTAR OCH TOTAL KRÖKNING

TOBIAS EKHOLM

1. KNUTAR OCH MATEMATISKA KNUTAR

De flesta knutar vi möter i vardagslivet är inte knutar i matematisk mening eftersom de, om man studerar dem lite närmare, är lite tilltrasslade snarare än riktigt knutna: Antag att någon knyter en (kanske mycket komplicerad) knut på ett snöre, lämnar snöret till dig och frågar om knuten kan trasslas upp. Ett sätt att besvara den frågan är naturligtvis att sätta sig ner och helt enkelt trassla upp den besvärliga knuten. Ett annat mindre konkret men mer heltäckande sätt att besvara frågan är följande. Antag att där någon knöt knuten stod en videokamera och spelade in hela förloppet. I slutet av videofilmen ser vi då en person med den till oss givna knuten i handen och om filmen spelas baklänges kommer vi att se personen trassla upp just denna knut. Detta resonemang leder oss till att varje knut på ett snöre kan trasslas upp. (Även om vi givet en knut på ett snöre inte har en aning om *hur* man trasslar upp den).

Till skillnad från (de flesta av) vardagslivets knutar har matematiska knutar den viktiga egenskapen att de är *slutna*. En matematisk knut produceras så här: Tag ett snöre och slå en knut på det. Sätt sedan ihop snörets ändrar så att snöret blir *slutet* (dvs saknar ändrar). Den enklaste knuten får man genom att lägga sitt snöre på ett bord och föra ihop dess ändrar så att snöret bildar bokstaven "o" på bordet. Denna knut kallas *o-knuten*.

Den grundläggande frågan i knutteori är: Givet två matematiska knutar avgör om den ena kan deformeras (trasslas) till den andra (naturligtvis utan att öppna de slutna knutarna).

I den här artikeln ska vi presentera ett geometriskt villkor som garanterar att en given knut kan deformeras till o-knuten, se Sats 6. (Sats 6 visades av Fary [2] och Milnor [3] omkring 1950. Nyligen visades ett resultat om minimalytor [1] som bland annat ger ett nytt bevis för Sats 6, se §4.C.) För att förstå detta geometriska villkor måste vi först skaffa oss några matematiskt mer lätthanterliga definitioner av de ingående begreppen.

2. KURVOR OCH PLAN I DET 3-DIMENSIONELLA RUMMET

2.A. Koordinater. En matematisk beskrivning av det 3-dimensionella rummet får vi genom att välja en punkt i detta rum och genom denna punkt lägga tre parvis vinkelräta axlar. Vanligtvis brukar man kalla den valda punkten *origo*. Välj sedan en positiv riktning på varje axel. Med hjälp av denna riktning förstår vi vad det betyder att gå 1 längdenhet i någon av axlarnas riktning från en punkt p : Det betyder att vi utgår från p och går 1 längdenhet *i axelns valda riktning*. Att gå -1 längdenhet i axelns riktning från p betyder att vi utgår från p och går 1

Date: Oct 11, 2001.

längdenhet i den motsatta riktningen. Vi kan nu representera varje punkt i rummet som en tal-trippel (x, y, z) . Den punkt som svarar mot (x, y, z) (har koordinaterna (x, y, z)) är den punkt vi når om vi först går x längdenheter från origo längs den första axeln, vidare därifrån y längdenheter i den andra axelns riktning och till sist vidare därifrån z längdenheter i den tredje axelns riktning, se Figur 1. Därför betecknas det 3-dimensionella rummet ofta \mathbb{R}^3 ($= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), där \mathbb{R} betecknar mängden av reella tal (det vill säga mängden av möjliga avstånd längs en axel).

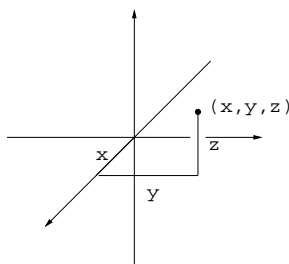


FIGURE 1. Koordinater i rummet

2.B. Linjer, linjesegment och vektorer. Genom varje par av olika punkter p och q i rummet går en unik linje $\Lambda(p, q)$. Denna linje består av de punkter man når om man går s längdenheter från p i riktning mot q för alla $s \in \mathbb{R}$. Ett linjesegment L , se Figur 2, är en ändlig bit av en linje Λ och om linjesegments ändpunkter är a med koordinater (x_a, y_a, z_a) och b med koordinater (x_b, y_b, z_b) är, enligt Pythagoras sats, längden $l(L)$ av L

$$l(L) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}. \quad (1)$$

En *vektor* är ett riktat linjesegment.

2.C. Plan genom origo. Genom varje par av olika linjer Λ_0 och Λ_1 genom origo går ett unikt plan Π genom origo. Detta plan består av de punkter man når om man går först s längdenheter från origo längs Λ_0 och sedan vidare därifrån t längdenheter i Λ_1 's riktning för alla talpar (s, t) i $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, se Figur 3. Till exempel kallas det plan som innehåller de två första av våra koordinataxlar för xy -planet och består av alla punkter med koordinater $(x, y, 0)$.

2.D. Kurvor i det 3-dimensionella rummet. Betrakta en partikel som rör sig i rummet. Vid tiden t befinner sig partikeln i punkten $p(t)$ med koordinaterna $(x(t), y(t), z(t))$. En *kurva* Γ är den mängd av punkter som en sådan partikel passerar mellan en viss tidspunkt $t = 0$ och en tidpunkt $t = T$, T tidsenheter

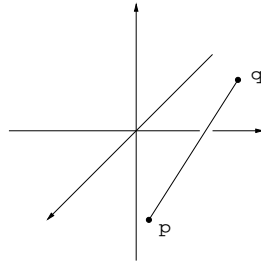
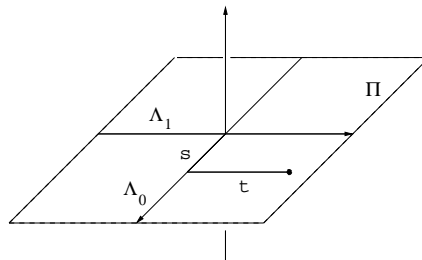
FIGURE 2. Ett linjesegment mellan p och q 

FIGURE 3. Ett plan genom origo

senare. (Med andra ord är kurvan Γ partikelns *bana*.) Om $p(t_1) \neq p(t_2)$ för alla tider $0 < t_1 < t_2 \leq T$ så sägs Γ vara en *enkel kurva*. (Med andra ord skär inte Γ sig själv.) Om $p(0) = p(T)$ så sägs Γ vara en *sluten kurva*. I Figur 4 ser vi tre kurvor. Kurvan A är varken sluten eller enkel (eftersom den skär sig själv vid p och har ändrar), kurvorna B och C är båda både enkla och slutna. Vi ger nu en formell definition av begreppet knut.

Definition 1. *En knut är en enkel sluten kurva i rummet.*

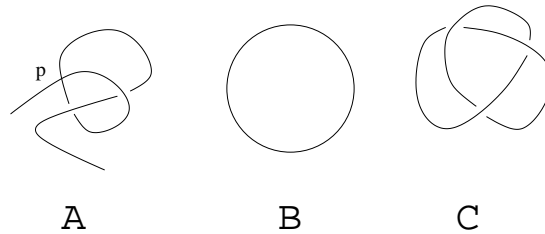


FIGURE 4. Tre kurvor

O-knuten kan beskrivas som den kurva som består av alla punkter i xy -planet som ligger på avstånd 1 längdenhet från origo. Med andra ord, är den banan för en partikel som rör sig enligt $(\cos(t), \sin(t), 0)$ för tider t mellan $t = 0$ och $t = 2\pi$, se kurvan B i Figur 4.

Två knutar Γ_0 och Γ_1 sägs vara *isotopa* om det finns en kontinuerlig deformation Γ_s , som beror av deformationsparametern s , $0 \leq s \leq 1$, som börjar i Γ_0 , slutar i Γ_1 och är sådan att för varje s är Γ_s en knut, se Figur 5. Det finns många knutar som

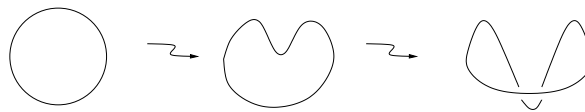


FIGURE 5. En deformation av oknuten

inte är isotopa med o-knuten ett exempel är treklöverknuten, se kurvan C i Figur

4, och det finns många metoder utvecklade för att visa att två givna knutar inte är isotopa. Några av de mer berömda är färgläggning, knut-grupper, Alexander-polynom och Jones-polynom, se []. Istället för att skilja knutar åt ska vi i det nedanstående presentera ett geometriskt villkor för knutar som garanterar att de är isotopa med oknuten.

2.E. Längden av en kurva. Låt Γ vara en kurva i rummet som är banan för en partikel som rör sig enligt $p(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $0 \leq t \leq T$. För att beräkna längden av Γ approximerar vi först Γ med en samling linjestycken: Låt N vara ett positivt heltal. Dela in intervallet $[0, T]$ i 2^N delar

$$\left[0, \frac{T}{2^N}\right], \left[\frac{T}{2^N}, \frac{2T}{2^N}\right], \dots, \left[\frac{(2^N-1)T}{2^N}, T\right].$$

För $1 \leq k \leq 2^N$, låt $L_N(k)$ vara linjestycket mellan $p\left(\frac{kT}{2^N}\right)$ och $p\left(\frac{(k+1)T}{2^N}\right)$ och låt $l_N(k)$ vara dess längd. Längden av kurvan Γ approximeras då av summan l_N av dessa linjestyckens längder, se Figur 6

$$l_N = l_N(1) + l_N(2) + \dots + l_N(2^N).$$

Eftersom summan av längderna av två sidor i en triangel alltid är större än längden av den tredje sidan följer att $l_N \geq l_M$ om $N > M$. Man definierar därför längden $l(\Gamma)$ av kurvan Γ som *det minsta tal som är större än l_N för alla positiva heltal N* . (Om man känner till integral- och differentialkalkyl kan man uttrycka längden

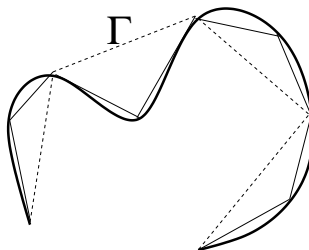


FIGURE 6. Två approximationer av Γ med linjesegment

genom

$$l(\Gamma) = \int_0^T l(p'(t)) dt,$$

där $p'(t)$ är derivatan av $p(t)$ och $l(p'(t))$ längden av denna vektor.)

3. ENHETSSFÄREN, PLAN OCH KURVOR

Enhetssfären S^2 i \mathbb{R}^3 är den mängd punkter i rummet som ligger på avståndet 1 längdenhet från origo $(0, 0, 0)$. Med andra ord, se (1), är S^2 den mängd tal-triplar (x, y, z) som uppfyller

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

3.A. Plan genom origo och normaler. Vi ska först använda enhetssfären för att få ordning på alla plan genom origo. Låt Π vara ett plan genom origo i \mathbb{R}^3 . Då skär Π enhetssfären S^2 i en cirkel G_Π . En sådan cirkel kallas *storcirkel* (och är ett slags ekvator på sfären). Låt n_Π och s_Π vara de vektorer av längd 1 som börjar i origo och är vinkelräta mot Π . Dessa kallas Π 's *enhetsnormaler*. (Om G_Π betraktas som ekvator är n_Π nordpolen, och s_Π sydpolen, se Figur 7)

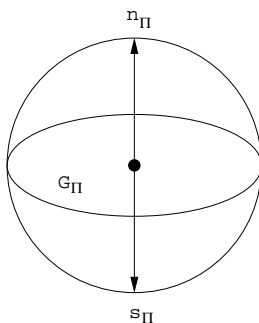


FIGURE 7. Storcirkeln G_Π och enhetsnormalerna n_Π och s_Π

Med hjälp av denna konstruktion kan vi mäta arean av kollektioner av storcirklar: Om A är en samling storcirklar så är samligen av deras enhetsnormaler $N(A)$ en bit av S^2 . Vi säger att A har area α om $N(A)$ har area 2α . (Faktorn 2 inkluderas eftersom varje plan har precis två enhetsnormaler.) Exempelvis har vi eftersom sfärens area är 4π att arean av alla plan genom origo är $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$. Vi ska använda detta areabegrepp för att studera medelvärden:

Antag att det till varje plan Π är ordnat ett positivt heltal $n(\Pi)$. För ett givet heltal k , låt $\text{Area}(k)$ vara arean av alla plan Π med $n(\Pi) = k$. Medelvärdet M av n över alla plan π definieras då som

$$M = \frac{1 \cdot \text{Area}(1) + 2 \cdot \text{Area}(2) + 3 \cdot \text{Area}(3) + 4 \cdot \text{Area}(4) + \dots}{2\pi},$$

Låt oss ta ett enkelt exempel: Antag att $n = 1$ för hälften av alla plan och $n = 2$ för den andra hälften. Då blir medelvärdet

$$\frac{1 \cdot \pi + 2 \cdot \pi}{2\pi} = \frac{3}{2}.$$

3.B. Kurvor på sfären. En kurva på S^2 är en rumskurva Γ som ligger helt i S^2 . Med andra ord måste varje partikel rörelse $p(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $0 \leq t \leq T$ med bana Γ uppfylla

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1, \text{ för alla } t.$$

Storcirklar är exempel på slutna kurvor på sfären. En bit av en storcirkel kallas för en *storcirkelbåge*. För att räkna ut längden av en kurva Γ på S^2 kan man ersätta de rätta linjestyckena $L_N(k)$ i konstruktionen i §2.E med den kortaste storcirkelbågen $A_N(k)$ mellan $p\left(\frac{kT}{2^N}\right)$ och $p\left(\frac{(k+1)T}{2^N}\right)$.

Alternativt kan man använda sig av följande intressanta sats som går under namnet Crofton's formel.

Sats 2. Om Γ är en kurva på S^2 och M är medelvärdet över alla storcirklar G på S^2 av antalet skärningspunkter mellan G och Γ så är längden $l(\Gamma)$ av Γ lika med $\pi \cdot M$.

Bevis. Från definitionen av längd följer att om Crofton's formel gäller för små storcirkelbågar så gäller den för alla kurvor. Vi behöver således bara bevisa den för små storcirkelbågar. Låt A vara en liten storcirkelbåge som ligger i storcirkeln G och har längd $l(A)$. Normalerna till planen vars skärningar med S^2 ger storcirklar som i sin tur skär A utgör två apelsinklyftor. Dessa båda skär G i två storcirkelbågar med längd $l(A)$, se Figur 8. Varje storcirkel (utom G själv som vi inte behöver räkna med eftersom arean av G är arean av en punkt på S^2 vilken är noll) som skär A skär A i exakt en punkt. Eftersom längden av G är 2π följer att medelvärdet M är $\frac{2 \cdot l(A)}{2\pi} = \frac{l(A)}{\pi}$ och således gäller $l(A) = \pi \cdot M$. \square

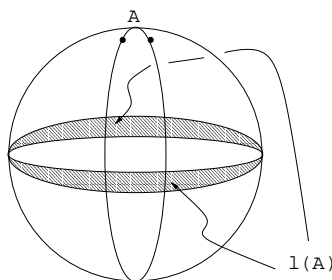


FIGURE 8. Apelsinklyftor i vilka normalerna till plan vars storcirklar skär A ligger.

4. TOTALKRÖKNING

4.A. Enhetstangentkurvan och totalkrökning. Till varje kurva Γ i \mathbb{R}^3 ordnas en kurva V_Γ på sfären, på följande sätt: Låt en partikel röra sig med den konstanta farten 1 längs Γ . Dess rörelse beskrivs då av $p(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Låt partikelns hastighet vid tiden t vara vektorn $v(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$. Att farten för partikeln är 1 betyder att längden $l(v(t)) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$ av $v(t)$ i varje ögonblick t är 1. Med andra ord ger $v(t)$ en kurva V_Γ på sfären. Denna kurva kallas Γ 's *enhetstangentkurva*. Om $p = (x(t), y(t), z(t))$ definierar vi *enhetstangenten* $V(p)$ till Γ i p genom $V(p) = v(t)$. Det följer då att kurvan V_Γ består av punkterna $V(p)$ för alla punkter p på Γ , se Figur 9. (Den som känner till differentialkalkyl vet att

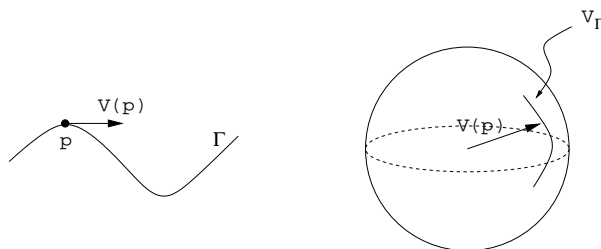


FIGURE 9. En kurva Γ , dess enhetstangent $V(p)$ i punkten p och dess enhetstangentkurva V_Γ på S^2 .

$$v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

där $x'(t)$, $y'(t)$ och $z'(t)$ betecknar derivatorna av funktionerna $x(t)$, $y(t)$ och $z(t)$.

Definition 3. Den totala krökningen $TC(\Gamma)$ av kurvan Γ är längden av dess enhetstangentkurva. Det vill säga

$$TC(\Gamma) = l(V_\Gamma).$$

Låt oss räkna ut totalkrökningen i två enkla exempel: Låt L vara ett linjestycke. Om en partikel rör sig längs L med farten 1 pekar dess hastighetsvektor alltid längs L . Således är kurvan V_L bara en punkt och därför är $TC(L) = 0$.

Låt C vara en cirkel i xy -planet med centrum i origo. Om en partikel rör sig längs C moturs med farten 1 och vid tiden t befinner sig i punkten $(x(t), y(t), 0)$ pekar dess hastighetsvektor i riktningen $(-y(t), x(t), 0)$, se Figur 10. Således gäller att om partikeln rört sig ett varv runt C kommer hastighetsvektorn att ha ritat ut en storcirkel på sfären och $TC(C) = 2\pi$. (Om man går N varv runt C blir totalkrökningen $2N\pi$).

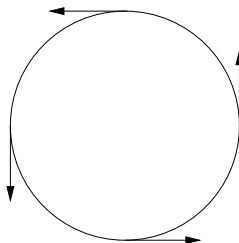


FIGURE 10. En cirkel och dess enhetstanget

Vi ser från dessa enkla exempel att den totala krökningen av en kurva mäter hur mycket kurvan böjer sig.

4.B. Jämviktspunkter. Låt Γ vara en knut och låt g vara en vektor med längd 1. Utrusta rummet med ett gravitationsfält som pekar i riktning g . Vi tänker oss nu att Γ är en fixerad stålwire i rummet och att en partikel med massa 1 är fri att röra sig längs Γ . Om vi sätter partikeln i en punkt p på Γ och släpper den kommer den för de allra flesta p att börja röra sig längs Γ . Dock finns det vissa speciella punkter från vilka den inte rör sig efter den släppts. Låt oss kalla dessa punkter *jämviktspunkter på Γ i riktning g* och studera dem lite närmare:

Villkoret för att p ska vara en jämviktspunkt är att gravitationskraften som verkar på partikeln ska upphävas av normalkraften från Γ på partikeln. Eftersom normalkraften alltid är vinkelrät mot Γ och lika stor som gravitationskraftens komponent vinkelrät mot Γ sker detta precis i de punkter p på Γ där enhetstangentvektorn $V(p)$ är vinkelrät mot g . Således ser vi att jämviktspunkterna på Γ i riktning g är exakt de punkter p där $V(p)$ är vinkelrät mot g , se Figur 11.

Sats 4. Låt $\mu(g, \Gamma)$ beteckna antalet jämviktspunkter på Γ i riktning g och låt μ vara medelvärdet av $\mu(g, \Gamma)$ då g varierar över S^2 . Då gäller att totala krökningen av Γ är lika med $\pi \cdot \mu$.

Bevis. Skärningspunkterna mellan V_Γ och storcirkeln G_g som är skärningen mellan det plan genom origo som är vinkelrätt mot g och S^2 svarar precis mot jämviktspunkterna på Γ i riktning g . Enligt Sats 2 gäller då att $l(V_\Gamma) = \pi \cdot \mu$. \square

Betrakta ånyo en knut Γ och ett gravitationsfält i riktning g . Notera att varje jämviktspunkt för Γ i riktning g också är en jämviktspunkt för Γ i riktning $-g$. Eftersom det finns en lägsta och högsta punkt på Γ i riktning g och en partikel som släpps från den lägsta punkten måste ligga still om gravitationen är riktad längs $-g$ och en i den högsta måste ligga still om den är riktad i riktning g ser vi att Γ har

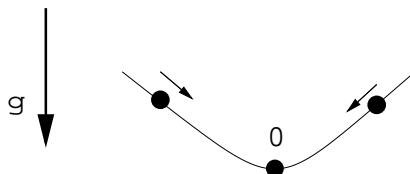


FIGURE 11. Hastigheter hos en partikel på en kurva som släpps från olika punkter

åtminstone två jämviktpunkter i riktning g . Detta gäller för varje g och tillämpar vi Sats 4 får vi:

Sats 5. För varje knut Γ gäller att dess totalkrökning $TC(\Gamma)$ är större än eller lika med 2π .

4.C. **Fary-Milnors sats.** I följande sats återfinns det utlovade geometriska villkoret på knutar som garanterar att de är oknutna.

Sats 6. Om Γ är en knut som har total krökning mindre än 4π så är Γ isotop med o-knuten

Bevis. Vi måste producera en deformation som börjar i Γ och slutar i o-knuten. Denna deformation och dess konstruktion är illustrerad i Figur 12. Eftersom $TC(\Gamma) < 4\pi$ följer från Sats 4 att det finns någon nollskild area av riktningar i vilka Γ har färre än 4 jämviktpunkter. Man kan visa (vi gör inte det här) att mängden av alla riktningar med udda antal jämviktpunkter har area noll. Således kan vi hitta en riktning g i vilken Γ har exakt två jämviktpunkter, den högsta och den lägsta i riktning g . Betrakta nu ett plan Π vinkelrätt mot g långt under Γ (i riktning g). Låt sedan Π röra sig med konstant hastighet i g -riktning och beteckna det plan i vilket Π befinner sig vid tiden t med Π_t . Vid någon tidpunkt a möter planet Π_a den lägsta jämviktpunkten. Sedan fortsätter planet uppåt, vid någon senare tidpunkt b möter Π_b den högsta jämviktpunkten och för tider $t > b$ skär Π_t inte längre Γ .

För tider t mellan a och b skär planet Π_t kurvan Γ i exakt två punkter: Det är lätt att inse att Π_t skär Γ i exakt två punkter för t nära a och om det för någon tid t föds en ny skärningspunkt måste detta vara en jämviktpunkt för Γ i riktning g . Således är de två ursprungliga skärningspunkterna de enda och de överlever tills de kolliderar i den högsta jämviktpunkten för $t = b$.

Låt L_t vara linjestycket i mellan skärningspunkterna mellan Π_t och Γ och låt D bestå av alla punkter som ligger på något linjestycke L_t . Då är D en disk som begränsas av Γ . Välj någon punkt p på denna disk och gör D platt i en liten omgivning $U(p)$ kring p . Deformera sedan Γ genom att trycka den inåt längs D mot p tills den blir en liten cirkel Γ' kring p i $U(p)$. Flytta nu $U(p)$ till xy -planet så att p hamnar i origo. Expandera sedan Γ' till o-knuten. \square

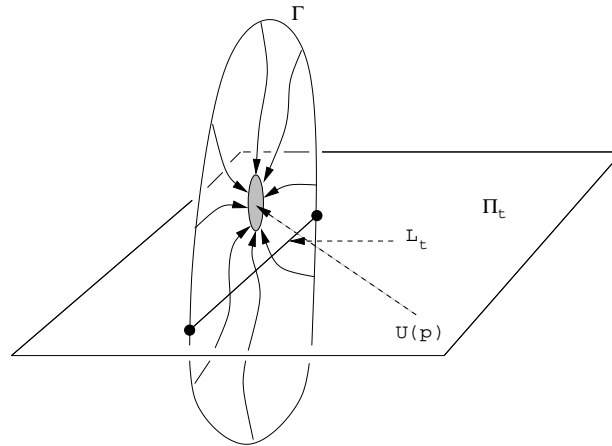


FIGURE 12. Konstruktionen i beviset för Sats 6

Man kan också visa Sats 6 med hjälp av area-minimerande diskar. Det visar sig nämligen att om Γ är en knut med totalkrökning mindre än eller lika med 4π så begränsar Γ en disk som har mindre area än varje annan disk Γ begränsar och att denna minimala disk kan användas som disken D i beviset ovan för att deformera Γ till o-knuten. För en detaljerad beskrivning av detta hänvisar vi till [1].

REFERNSER

- [1] T. Ekholm, B. White, and D. Wienholtz, *Embeddedness of minimal surfaces with total boundary curvature at most 4π* , Ann. of Math., to appear.
- [2] M. Fary, *Sur la courbe totale d'une courbe gauche faisant un noeud*, Bull. Soc. Math. France **77** (1949) 128–138.
- [3] J. Milnor, *On the total curvature of knots*, Ann. of Math. **52** (1950) 248–257.