Sannolikhet och statistik

Sannolikhetsteorins grunder

VT 2009

Uwe.Menzel@math.uu.se

http://www.math.uu.se/∼uwe/

Slumpvariabel (Stokastisk variabel)

- Resultat av ett slumpförsök - utgången kann inte kontrolleras
- Resultatet kan inte förutspås, men vi vet (ofta) mer än ingenting
  - utfallsrum Ω - alla möjliga resultat av försöket
  - Fördelning - vilken sannolikhet för vilket resultat

Utfall, Utfallsrummet, Händelse

Definition 2.1
Resultatet av ett slumpmässigt försök kallas ett *utfall*.

Beteckning: ω

Exempel

- Tärning: Antal ögon är tre: $\omega_3 = 3$
- Roulette: 24 vinner
- Opinionsundersökning: En tillfälligt utvald väljare kommer att rösta på parti X

Utfall, Utfallsrummet, Händelse

Definition 2.2
Mängden av alla möjliga utfall kallas *utfallsrummet*.

Beteckning: Ω

Exempel

- Tärning: alla möjliga antal ögon:$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Roulette: alla möjliga tal
- Glödlampa: alla möjliga utfall för livslängden: $\Omega = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$

Utfall, Utfallsrummet, Händelse

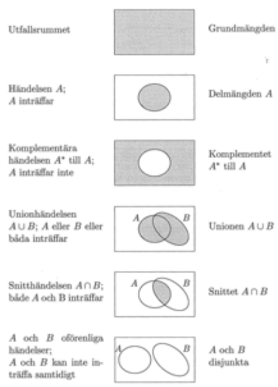
Definition 2.3
En *händelse* är en samling av utfall.

Beteckning: A, B, C osv.

Exempel

- Tärning. Kasta ett jämnt tal: $A = \{2, 4, 6\}$
- Tärning. Kasta ett tal större än fyra: $B = \{5, 6\}$
- Glödlampans livslängd är mellan 1000 och 1100 h

Händelser, Mängder, Venn diagram



Kolmogorovs Axiomsystem

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE
HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK"
ZWEITER BAND
3

GRUNDBEGRIFFE DER
WAHRSCHEINLICHKEITS-
RECHNUNG

VON

A. KOLMOGOROFF

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

Kolmogorovs Axiomsystem

Varje händelse A tilldelas ett tal $P(A)$: slh att A inträffar

Sannolikheten måste uppfylla vissa krav:

Kolmogorovs axiomer

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ A och B oförenliga

Axiom 3 kan udvidgas till fler an 2 händelser

Följdsatser av Kolmogorovs axiomer: Komplementsatsen

Sats 2.1 (*Komplementsatsen*)

För komplementet A^* till A gäller att $P(A^*) = 1 - P(A)$

Bevis: $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^*) = P(A) + P(A^*)$

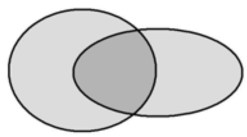
Vi använde:

- A och A^* är oförenliga
- Axiom 2
- Axiom 3

Följdsatser av Kolmogorovs axiomer: Additionssatsen

Sats 2.2 (*Additionssatsen*)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Frekvenstolkningen

- Händelse: kast med tärning, antal ögon är ett: $A = \{1\}$
- Hur kan man denna händelse tilldela en sannolikhet **P(A)** ?

Antal kast	Antal ettor	Relativ frekvens
2	0	0.000
5	1	0.200
10	1	0.100
50	6	0.120
100	17	0.170
500	93	0.186
1000	173	0.173

- relativa frekvensen för hög antal försök $\Rightarrow$ sannolikhet
- erfarenhet, intuition

Diskreta och kontinuerliga utfallsrum

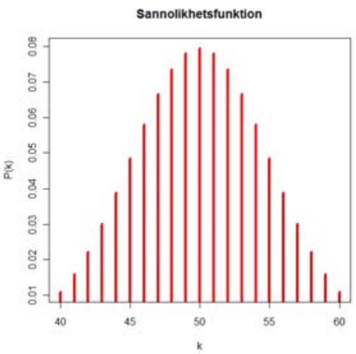
Jämför:

1. Tärning, antal ögon vid en kast: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Tärning, antal kast innan man får tre sexor i rad: $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$
3. Glödlampa, livslängden: $\Omega = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$

Antalet utfall i Ω	Beteckning för Ω
ändligt	diskret utfallsrum
uppräkneligt oändligt	diskret utfallsrum
inget av dem	kontinuerligt utfallsarum

Definition 2.4 på s. 8 Blom

Diskreta utfallsrum: Sannolikhetsfunktion



Kolmogorovs axiomer

Den klassiska sannolikhetsdefinitionen

- anta att ett försök kan utfalla på m möjliga sätt
- ... som är alla lika sannolika och disjunkta
- och att g av dessa är gynnsamma för händelse A

$$\boxed{P(A) = \frac{g}{m}} \qquad \text{(följer från axiom 3)}$$

Exempel

- Tärning: slh att kasta en femma
- Tärning: slh att kasta ett jämnt tal
- 2 tärningar: slh att ögonsumman är mindre än fyra
- 2 tärningar: slh att ögonsumman är exakt 7
- Kortlek: slh att dra ett ♡
- för mera komplicerade exempel erfordras *kombinatorik*

Experiment: Kastar 2 tärningar, adderar ögontal. Vad är sannolikheten för de möjliga summorna **?**

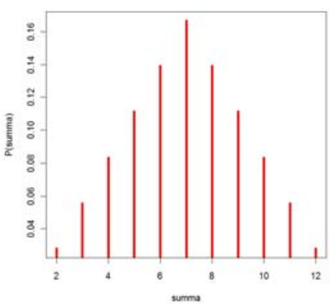
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\Omega_{summa} = \{2, 3, \ldots, 12\}$ och $m = 36$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\begin{aligned} P(2) &= 1/36 \\ P(3) &= 2/36 \\ P(4) &= 3/36 \\ &\ldots \\ P(7) &= 6/36 \\ &\ldots \\ P(12) &= 1/36 \end{aligned}$$

Sannolikhetsfunktion för ögonsumman av 2 tärningar



Vi återkommer till det: **Centrala gränsvärdessatsen**

Betingad sannolikhet

Vad är det ?

Att beräkna sannolikheten för en händelse om man redan vet att en annan händelse har inträffat.

Exempel

Tärning: $P(1) = 1/6$
men om man redan vet att utfallet är udda får man
$P(1|\,udda) = 1/3$

Man skriver $P(B|\,A)$: *betingande* slh. för B givet att A har inträffat.

Betingad sannolikhet - exempel

	Rökare	Icke-rökare	Totalt
Män	20	80	100
Kvinnor	50	100	150
Totalt	70	180	250

Låt M = {man} och R = {rökare} , välj slumpmässigt en person

$P(M) = \frac{100}{250} = 2/5$ och $P(B) = \frac{70}{250} = 7/25$

$P(M \cap R) = \frac{20}{250} = 2/25$ (man och röker)

Om jag redan vet att en man valts: vad är sannolikheten att en rökare valts?

$P(R|M) = \frac{20}{100} = \frac{20/250}{100/250} = \frac{P(M \cap R)}{P(M)}$

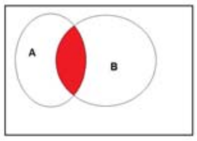
Betingad sannolikhet

Definition 2.6

Låt A och B vara två händelser. Uttrycket

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

kallas den *betingande sannolikheten för B givet att A har inträffat*.



Figur: Betingad slh kan ses som en renormalisering av utfallsrummet

Betingad sannolikhet: Multiplikationssats

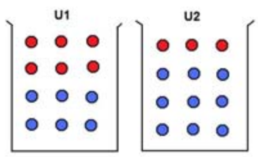
Man kan också skriva:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

Exempel

Dra två kort. Vad är sannolikheten att båda är hjärter ?

Den totala sannolikheten



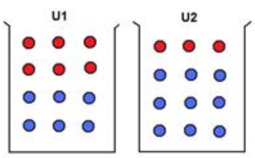
Väljer slumpmässigt en urna, sedan en kula ur urnan.

$P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$

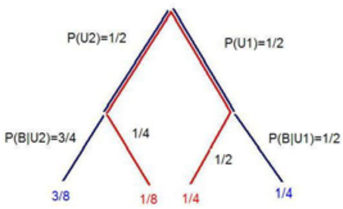
$P(R|U_1) = \frac{1}{2}$ och $P(R|U_2) = \frac{1}{4}$

Vad är den totala slh. $P(R)$ att dra en röd kula ?

Total sannolikhet - exempel

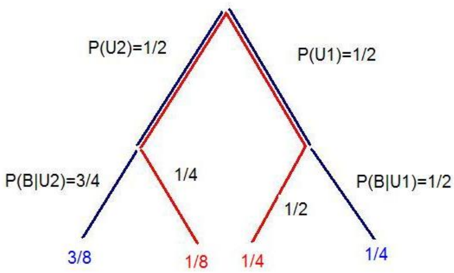


Väljer slumpmässigt en urna, sedan en kula ur urnan.



Figur: $P(R) = 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/4$

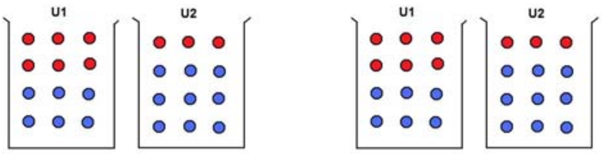
Total sannolikhet - exempel



Figur: träddiagram för 2 urnor med röda och blåa kulor

$$\begin{aligned} P(R) &= P(U_1) \cdot P(R|U_1) + P(U_2) \cdot P(R|U_2) \\ &= 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/4 = 3/8 \end{aligned}$$

Exempel - fler urnor

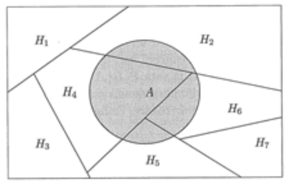


$$
\begin{aligned}
P(R) &= P(U_1)\cdot P(R|U_1) + P(U_2)\cdot P(R|U_2) + P(U_3)\cdot P(R|U_3) + \dots \\
&= \sum_i P(U_i)\, P(R|U_i)
\end{aligned}
$$

Sats 2.9 Lagen om total sannolikhet

Om händelserna $H_1, \dots, H_n$ är parvis oförenliga och $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, dvs att i ett försök inträffar precis en av dem, gäller för varje händelse A att

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i)$$



Figur: Delat utfallsrum

Total sannolikhet - exempel

Exempel 2.17 - Flermaskinstillverkning

I en fabrik tillverkas:

- 25 % av enheterna vid maskin 1
- 35 % vid maskin 2
- 40 % vid maskin 3

Maskinerna tillverkar en viss andel defekter enheter:

- maskin 1: 5 % defekt
- maskin 2: 4 %
- maskin 3: 2 %

Sannolikheten att en slumpmässigt vald enhet är defekt? (A)

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(M_1)\, P(A|M_1) + P(M_2)\, P(A|M_2) + P(M_3)\, P(A|M_3) \\
&= 0.25 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.04 + 0.4 \cdot 0.02 = 0.0345
\end{aligned}
$$

Bayes sats

... att vända på en betingning: $P(B|A) \Longleftrightarrow P(A|B)$

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(B \cap A) \\
P(B|A)\cdot P(A) &= P(A|B)\cdot P(B) \\
P(B|A) &= \frac{P(A|B)\, P(B)}{P(A)}
\end{aligned}
$$

Sats 2.10 - *Bayes sats*

Om händelserna $H_1, \dots, H_n$ är parvis oförenliga och $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, dvs att i ett försök inträffar precis en av dem[1], gäller för varje händelse A att

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)\, P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\, P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i)}$$

[1] samma villkor som i satsen om total sannolikhet

Bayes sats - exempel

Exempel 2.19 - Flermaskinstillverkning (forts.)

I en fabrik tillverkas:

- 25 % vid maskin 1 med 5 % defekt
- 35 % vid maskin 2 med 4 % defekt
- 40 % vid maskin 3 med 2 % defekt

En kund påträffar en felaktig enhet. Hur stor är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin 1 ?

Vi vet redan från exempel 2.17 att $P(A) = 0.0345$ (total sannolikhet att en felaktig enhet påträffas)

$$P(M_1|A) = \frac{P(A|M_1)\, P(M_1)}{P(A)} = \frac{0.05 \cdot 0.25}{0.0345} = 0.36$$

Oberoende händelser

Händelse B är oberoende av händelse A om $P(B|A) = P(B)$

Allmänt gäller $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ (betingad sannolikhet)

Om vi använder $P(B|A) = P(B)$ får vi följande definition:

Definition 2.7

A och B sägs vara *oberoende* händelser om

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Oberoende händelser - exempel

Exempel 2.21 - Kast med två tärningar

Kast med två tärningar. Sannolikheten att få en etta på båda tärningar?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Oberoende händelser - följdsats

Om händelserna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ är oberoende och $P(A_i) = p_i$, så är sannolikheten att minst en av dem inträffar

$$P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n)$$

Om $P(A_i) = p \quad \forall i$ följer

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n$$

Bevis: Blom, s. 34

Exempel 2.23 Olycksrisk 1/1000 vid 1000 oberoende tillfällen: Chancen att *någon* olycka inträffar?

$$P(A) = 1 - (1 - 0.001)^{1000} \approx 0.63$$

Sammanfattning

1. Den klassiska sannolikhetsdefinitionen
2. Betingad sannolikhet
3. Den totala sannolikheten
4. Bayes sats
5. Oberoende händelser