Sannolikhet och statistik

Väntevärde, Varians, Stora talens lag

VT 2009

Uwe.Menzel@math.uu.se

http://www.math.uu.se/∼uwe/

Exempel väntevärde: Tärningskast (Blom s. 107)

Ögontal	1	2,3	4,5,6
Belopp	1	2	4

Låt s.v. X vara beloppet man erhåller efter en kast:

k	1	2	4
p(k)	1/6	2/6	3/6

Väntevärdet: multiplicerar varje utfall med tillhörande slh:

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$$

I det långa loppet *förväntar* vi oss 17/6 kronor per kast.

Definition väntevärde

Diskret	$E(X) = \sum_k k \cdot p_X(k)$
Kontinuerlig	$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)$

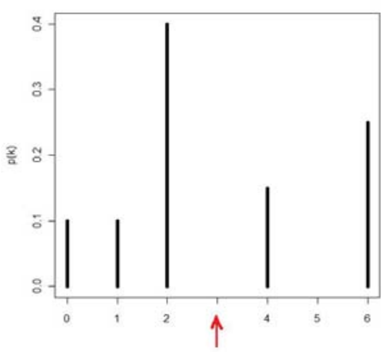
Väntevärde, Aritmetiska medelvärde

$$E(X) = \sum_k k \cdot p_X(k)$$

x	1	2	4
p(x)	1/6	2/6	3/6

Medelvärde	$\bar{X} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$
Väntevärde	$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$

Väntevärde: interpretation som tyngdpunkt för en massfördelning



Väntevärden för $U(a, b)$ och Exp(λ)

$\boxed{X \sim U(a, b)}$

$$E(x) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$\boxed{X \sim Exp(\lambda)}$

$$E(x) = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

Väntevärdet för en funktion av en s.v.

$\boxed{Y = g(X)}$

Diskret	$E(Y) = \sum_k g(k) \cdot p_X(k)$
Kontinuerlig	$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)$

Väntevärdet för en funktion av en s.v.

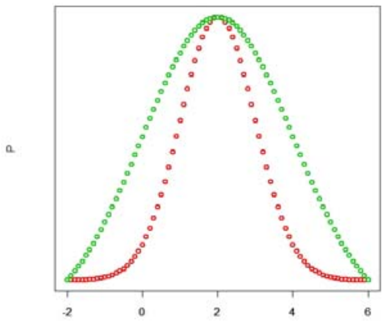
$$E(Y) = \sum_k g(k) \cdot p_X(k)$$

Tärningskast: Låt nu **ögontalet** vara s.v. X (inte beloppet):

k	1	2	3	4	5	6
$p(k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$g(k)$	1	2	2	4	4	4

$$E(g(k)) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

Varians av slumpvariabler



Figur: Samma väntevärde, men ändå olika

Definition: Varians av slumpvariabler

$\boxed{V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]}$ där $\mu = E(X)$

Diskret	$V(X) = \sum_k (k-\mu)^2 \cdot p_X(k)$
Kontinuerlig	$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f_X(x)$

Varians: Beräkningsexempel

Tärningskast: s.v. X är nu antalet kronor igen:

k	1	2	4
p(k)	1/6	2/6	3/6

$$V(X) = \sum_k (k-\mu)^2 \cdot p_X(k)$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(1 - \frac{17}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{17}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} + \left(4 - \frac{17}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{11^2}{6^2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{7^2}{6^2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{53}{36} \end{aligned}$$

Standardavvikelse, Variationskoeefficient

Standardavvikelse:

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

Variationskoefficient:

$$R(X) = D(X)/E(X)$$

Räkneregler för linjärtransformation

X och Y s.v., a,b konstanter:

$$
\begin{aligned}
E(aX+b) &= a \cdot E(X) + b \\
V(aX+b) &= a^2 \cdot V(X) \\
D(aX+b) &= |a| \cdot D(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(aX+b) &= E\left[(aX+b-a\mu-b)^2\right] \\
&= E\left[(aX-a\mu)^2\right] \\
&= a^2 \cdot E\left[(X-\mu)^2\right] \\
&= a^2 \cdot V(X) \qquad q.e.d.
\end{aligned}
$$

Räkneregler för linjärtransformation

$$
\begin{aligned}
E(aX+b) &= a \cdot E(X) + b \\
V(aX+b) &= a^2 \cdot V(X) \\
D(aX+b) &= |a| \cdot D(X)
\end{aligned}
$$

X ökas med en konstant b:

- $E(X)$ ökar med samma konstant
- $D(X)$ och $V(X)$ ändras inte

X multipliceras med en konstant a:

- $E(X)$ och $D(X)$ multipliceras med a
- $V(X)$ multipliceras med a^2

Alternativt sätt att beräkna variansen

$$\boxed{E(aX+b) = a \cdot E(X) + b}$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right] \\
&= E\left(X^2\right) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\
&= E\left(X^2\right) - \mu^2
\end{aligned}
$$

Alternativt sätt att beräkna variansen

$$\boxed{V(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2}$$

k	1	2	4
p(k)	1/6	2/6	3/6

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right) - \mu^2 = \sum_k k^2 \cdot p_X(k) - \mu^2 \\
&= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{53}{36}
\end{aligned}
$$

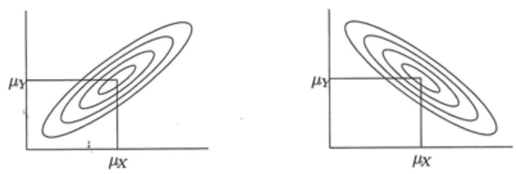
Standardiserad slumpvariabel

Om X är en s.v. med $E(X) = \mu$ och $D(X) = \sigma$, kallas $Y = (X-\mu)/\sigma$ en <u>standardiserad</u> s.v.

$$E(Y) = E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{E(X)-\mu}{\sigma} = 0$$

$$D(Y) = \frac{D(X)}{\sigma} = 1$$

Beroendemått: Illustration



Figur: Nivåkurver, $z = p_{X,Y}(x,y)$ vänster: $c > 0$ höger: $c < 0$

Kovarians

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

$$C(X,Y) = \sum_j \sum_k (j-\mu_X)(k-\mu_Y)\, p_{X,Y}(j,k)$$

$$C(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f_{X,Y}(x,y)\; dx\, dy$$

Korrelationskoefficient

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{D(X)\,D(Y)} = \frac{E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]}{D(X)\,D(Y)}$$

$$-1 \le \rho \le 1$$

Produkten $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ är avgörande för förtecknet av ρ

Korrelationskoefficient: Interpretation

$\boxed{\rho(X,Y) > 0} \Rightarrow$ X, Y tenderar att samtidigt avvika åt samma håll från sina respektive väntevärden

$\boxed{\rho(X,Y) < 0} \Rightarrow$ X, Y tenderar att samtidigt avvika åt olika håll från sina respektive väntevärden

$C(X,Y) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ X och Y kallas okorrelerade

Oberoende $\Rightarrow$ **Okorellerade** (andra riktningen gäller inte)

Är X och Y oberoende gäller nämligen: $\quad E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

alltså

$C(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0$

Korrelationskoefficient: Exempel

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	Summa
0	0.38	0.16	0.04	0.01	0.01	0.60
1	0.17	0.08	0.02			0.27
2	0.05	0.02	0.01			0.08
3	0.02	0.01				0.03
4	0.02					0.02
Summa	0.64	0.27	0.07	0.01	0.01	1.00

$$E(X) = 0 \cdot 0.60 + 1 \cdot 0.27 + 2 \cdot 0.08 + 3 \cdot 0.03 + 4 \cdot 0.02 = \underline{0.60}$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot 0.60 + 1^2 \cdot 0.27 + 2^2 \cdot 0.08 + 3^2 \cdot 0.03 + 4^2 \cdot 0.02 = \underline{1.18}$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0.64 + 1 \cdot 0.27 + 2 \cdot 0.07 + 3 \cdot 0.01 + 4 \cdot 0.01 = \underline{0.48}$$

$$E(Y^2) = 0^2 \cdot 0.64 + 1^2 \cdot 0.27 + 2^2 \cdot 0.07 + 3^2 \cdot 0.01 + 4^2 \cdot 0.01 = \underline{0.80}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1.18 - 0.60^2 = \underline{0.82}$$

$$V(Y) = 0.80 - 0.48^2 = \underline{0.5696}$$

$$E(XY) = 1 \cdot 1 \cdot 0.08 + 1 \cdot 2 \cdot 0.02 + 2 \cdot 1 \cdot 0.02 + 2 \cdot 2 \cdot 0.01 + 3 \cdot 1 \cdot 0.01 = \underline{0.23}$$

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.23 - 0.60 \cdot 0.48 = \underline{-0.0580}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-0.0580}{\sqrt{0.82}\sqrt{0.5696}} = \underline{\underline{-0.0849}}$$

Väntevärde och varians för summan av X och Y

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= E(X) + E(Y) \\ V(X+Y) &= V(X) + V(Y) + 2C(X,Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\left[(X+Y-\mu_X-\mu_Y)^2\right] \\ &= E\left[(X-\mu_X+Y-\mu_Y)^2\right] \\ &= E\left[(X-\mu_X)^2 + (Y-\mu_Y)^2 + 2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \\ &= V(X) + V(Y) + 2C(X,Y) \end{aligned}$$

X, Y oberoende:

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X) + V(Y) \\ D(X+Y) &= \sqrt{V(X)^2 + V(Y)^2} \end{aligned}$$

Väntevärde och varians för linjärkombinationer av X och Y

$$\begin{aligned} E(aX+bY) &= a \cdot E(X) + b \cdot E(Y) \\ V(aX+bY) &= a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2abC(X,Y) \end{aligned}$$

OBS!! Det betyder att:

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2C(X,Y)$$

Väntevärde och varians för slumpvariabeln $\bar{X}$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ är s.v. med samma väntevärde μ :

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ oberoende s.v. med samma standardavvikelse σ :

$$V\left[\bar{X}\right] = V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V\left[X_i\right] = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \sigma^2/n$$

$D\left[\bar{X}\right] = \sigma/\sqrt{n}$

Väntevärde och varians för medelvärdet av flera s.v.

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende s.v. med samma väntevärde μ och samma standardavvikelse σ .

Låt

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{(aritm. medel) OBS!! slumpvariabel !!}$$

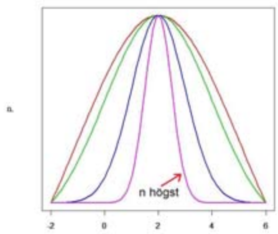
Då gäller:

$$\boxed{E\left(\bar{X}\right) = \mu, \quad V\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{och} \quad D\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Spridningen tar av när n växer $\Rightarrow$ Stora talens lag

Väntevärde och varians för medelvärdet av flera s.v.

$$\boxed{V\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}}$$



Figur: Spridningen av medelvärdet tar av när n växer

Stora talens lag

$\bar{X}$ av n oberoende s.v. med samma μ och σ ligger nära μ om bara n är tillräckligt stor.

Sats 5.12 Stora talens lag

Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende och likafördelade s.v., var och en med väntevärdet μ, och sätt

$$\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$$

Då gäller, för alla $\epsilon > 0$, att

$$P\left(\mu - \epsilon < \bar{X}_n < \mu + \epsilon\right) \to 1 \quad \text{då} \quad n \to \infty$$