Sannolikhet och statistik

Intervallskattning

VT 2009

Uwe.Menzel@math.uu.se

http://www.math.uu.se/~uwe/

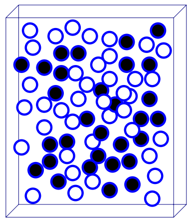
Punktskattning

$$\mu^* = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$(\sigma^2)^* = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$p^* = \frac{X}{n} \qquad X \in Bin(n,p)$$

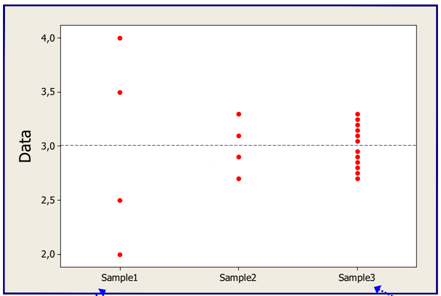
✓ väntevärdesriktigt
✓ konsistent
✓ effektivt



Exempel:

- p = andel vita kulor
- samtidigt parameter i Bin(n,p)

Punktskattningen räcker inte !



$\bar{x} = 3$, $d = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.456$

$\bar{x} = 3$, $d = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.129$

$\bar{x} = 3$, $d = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.0587$

Medelfelet

... fås genom att ersätta okända parametrar i formeln för standardavvikelsen med deras skattningar:

$$D = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; d = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \text{när } \mu \text{ skattas}$$

$$d = \sqrt{\frac{p_{obs}\cdot(1-p_{obs})}{n}} \qquad \text{när } p \text{ skattas}$$

$$\mu = \bar{x} \pm d \quad ?$$

British Journal of Anaesthesia 90 (4): 514–16 (2001)
DOI: 10.1093/bja/aeg087

Misuse of standard error of the mean (SEM) when reporting variability of a sample. A critical evaluation of four anaesthesia journals

Referensvariabel

$$\bar{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \rightarrow$$

(om $X_i \in N$ eller n stor)

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)}$$

... är en referensvariabel om σ är känd.

1. helt känd så när som på parametern som skattas
2. helt känd fördelning

Det viktigaste: att hitta en referensvariabel

$$\bar{X} \in N(\mu, \sigma/\sqrt{n}) \implies \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1) \quad (\sigma \text{ känd})$$

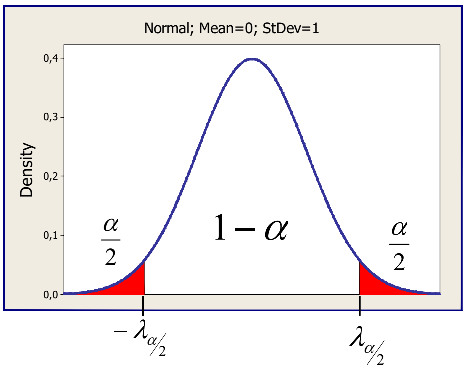
Uttrycket $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ används som **referensvariabel** (när σ känd).

Referensvariabeln måste vara känd så när som på parametern vi vill skatta (μ)

Referensvariabelns fördelning måste vara fullständigt känd (inga parametrar), här $N(0,1)$

Referensvariabeln stängs sedan in inom denna fördelningens kvantiler (se nere)

$$Z \in N(0,1) \quad \rightarrow \quad P\left(-\lambda_{\alpha/2} \le z \le \lambda_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$



Allmän metod för att härleda ett KI

1) Hitta en referensvariabel
2) Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3) Stäng in parametern som skattas mellan kända siffror

1) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$ *referensvariabel om σ är känd*

2) $P\left(-\lambda_{\alpha/2} \le \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le +\lambda_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$ *omforma inom parantesen ...*

3) $P\left(\bar{x}-\lambda_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\lambda_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

$$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Skatta väntevärdet för $N(\mu,\sigma)$ med KI där σ är känd

$$\bar{X} \in N(\mu, D) \quad \text{med} \quad D = \sigma/\sqrt{n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\bar{X}-\mu}{D} \in N(0,1)$$

För en observation av referensvariabeln, som är $N(0,1)$, gäller:

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{D} < \lambda_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Omformning av uttrycket inom parantesen ger:

$$P\left(\bar{x}-\lambda_{\alpha/2}D < \mu < \bar{x}+\lambda_{\alpha/2}D\right) = 1-\alpha$$

Det sanna väntevärdet omfattas alltså med slh. $(1-\alpha)$ av:

$$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}D \qquad D = \sigma/\sqrt{n}$$

Konfidensintervall för μ med konfidensgraden $(1-\alpha)$

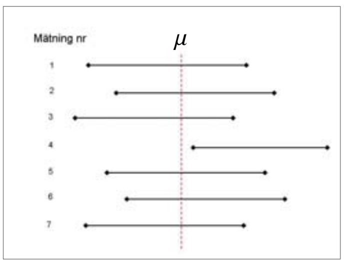
⋆ Omformning av uttrycket inom parantesen

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{D} \le \lambda_{\alpha/2}\right) && | \cdot D \\
&= P\left(-\lambda_{\alpha/2}D < \bar{x}-\mu \le \lambda_{\alpha/2}D\right) && | \cdot(-1) \\
&= P\left(\lambda_{\alpha/2}D \ge \mu-\bar{x} > -\lambda_{\alpha/2}D\right) && | +\bar{x} \\
&= P\left(\bar{x}+\lambda_{\alpha/2}D \ge \mu > \bar{x}-\lambda_{\alpha/2}D\right) && | \text{ vänd om} \\
&= P\left(\bar{x}-\lambda_{\alpha/2}D < \mu \le \bar{x}+\lambda_{\alpha/2}D\right)
\end{aligned}
$$

$$P\left(\bar{x}-\lambda_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\lambda_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

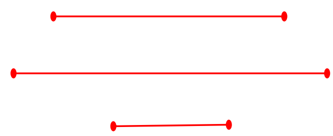
$$P\left(\bar{x}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 95\% \qquad \alpha = 0.05$$

Sannolikheten att dessa intervallgränser omfattar det sanna värdet μ är $(1-\alpha)\cdot 100\%$.



Konfidensintervallets bredd

$$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{konfidensgrad}: \ (1-\alpha)\cdot 100\%$$



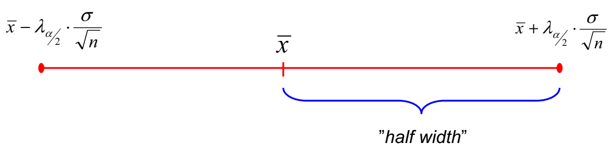
95%; n=100

99%; n=100

95%; n=1000

Stickprovsstorlek och konfidensintervallets bredd

$$\boxed{I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

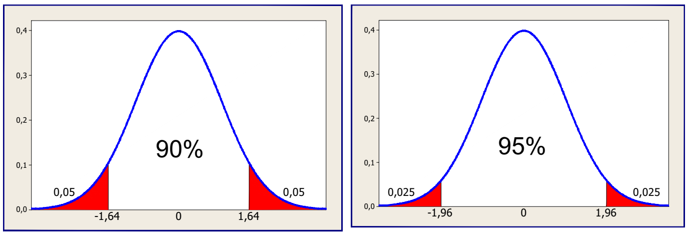


$$\boxed{h = \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad n = \left(\lambda_{\alpha/2}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{h^2}}$$

Stickprovsstorlek

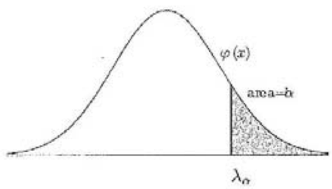
- n måste vara stor om
  - h ska bli litet
  - σ är stor
  - konfidenskoefficienten $(1-\alpha)\cdot 100$ ska bli stor

$$\boxed{n = \left(\lambda_{\alpha/2}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{h^2}}$$



$\lambda_{\alpha/2} = 1.64$ $\quad$ $\lambda_{\alpha/2} = 1.96$

Kvantiler för N(0,1)



Figur: Kvantiler för $N(0,1)$: $\Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$

α	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
λ_α	3.29	3.09	2.58	2.33	1.96	1.64	1.28

Sammanfattning I

- μ skattas med medelvärdet
- X_i från normalfördelning eller n stor
- σ känd
- $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall:

$$\boxed{I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

punktskattning ± konstant · medelfel

$$n = \left(\lambda_{\alpha/2}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{h^2}$$

Om σ inte är känd, men stickprovet stort

$$S^2 \rightarrow \sigma^2 \quad (\,konsistent\,)$$
$$V\left(S_n^2\right) \rightarrow 0 \quad om \quad n \rightarrow \infty$$

$$\boxed{I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad n \geq 30}$$

punktskattning ± konstant · medelfel

Standard error of the mean (SEM)

$$\boxed{\mu = \bar{x} \pm d = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}} \quad ?$$

$$\boxed{P\left(\bar{x} - 1 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 68\,\%}$$

... vilket inte är särskilt "säkert" ...

Sammanfattning II

- μ skattas med medelvärdet
- σ okänd men stort stickprov (n ≥ 30)
- (1-α)·100% konfidensintervall:

$$\boxed{I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

punktskattning ± konstant · medelfel

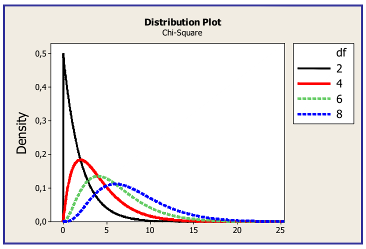
Om: σ okänd och stickprovet inte heller stort

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$$

stickprovsfördelningen för medelvärdet

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1)$$

gäller allmänt om X_i oberoende, normalfördelad med standardavv. σ



Definition för t-fördelningen

Förutsättningarna:

$Z \in N(0,1)$

$W \in \chi^2(\nu)$ $\quad \nu$ *frihetsgrader*

Z *och* W *oberoende*

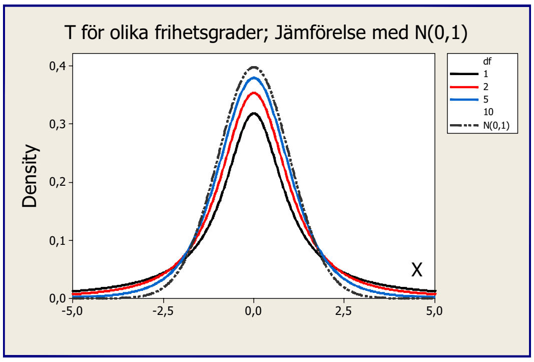
Om Z och W har ovanstående fördelningar, så har följande kvotient en t-fördelning:

$$\boxed{\frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{\nu}}} \in t(\nu)}$$

t-distribution med ν frihetsgrader

Student's distribution

Students t-fördelning



$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu+1}{2})}$$

täthetsfunktion

Referensvariabel

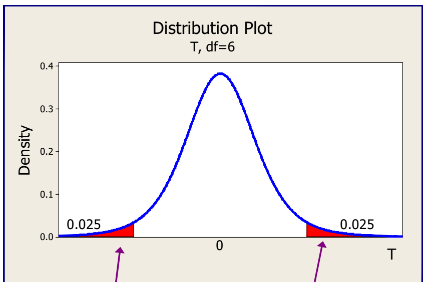
$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n-1}}} = \frac{\frac{(\bar{X}-\mu)\cdot\sqrt{n}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2\cdot(n-1)}}} = \frac{(\bar{X}-\mu)\cdot\sqrt{n}}{S} = \frac{(\bar{X}-\mu)}{S/\sqrt{n}}$$

t(n-1) - fördelad

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1)}$$

X_i måste vara normalfördelade

Kvantiler för t-fördelningen



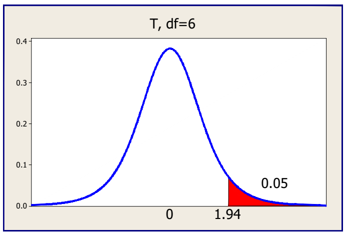
$t_{0.975}(6) = -t_{0.025}(6)$
(symmetriskt runt 0)

$t_{0.025}(6)$

OBS!: Kvantilerna beror också på antalet ”frihetsgrader”

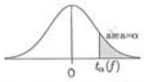
t-test.MPJ

Kvantiler för t-fördelningen



rad = antalet frihetsgrader
kolumn = α - värdet

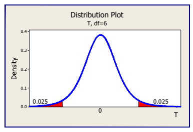
Tabell 3. *t*-fördelningen
$P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$, där $X \in t(f)$.



f \ α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29 $= \lambda_\alpha$

Allmän metod

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1)$$



$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \le +t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha/2}(f)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\alpha/2}(f)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\boxed{I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(f)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad f = n-1}$$

$X_i \in N$, oberoende
små stickprov

$t_{\alpha/2}(f) > \lambda_{\alpha/2}$ *bredare konfidensintervall pga. mindre stickprov*

Sammanfattning III

- μ skattas med medelvärdet
- σ okänd och litet stickprov
- $X_i \in N$ och oberoende
- (1-α)·100% konfidensintervall:

$$\boxed{I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

punktskattning ± konstant · medelfel

Exempel för skattning av μ för $N(\mu, \sigma)$

Vi vet (eller har skäl att tro) att X är normalfördelad.

$\vec{x} = (15.7, 14.3, 12.65, 13.2, 16.85, 16.05, 16.55, 16.05, 16.6, 17.05)$

Sökes: 95% konfidensintervall för μ

Om det är känt att $\sigma = 1.56$:

$D = \sigma/\sqrt{n} \approx 0.5 \qquad \lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.025} = 1.96$

$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\cdot D = 15.5 \pm 1.96\cdot 0.5 \approx 15.5 \pm 1 = (14.5, 16.5)$

Om σ är okänd:

$s = 1.56 \quad d = s/\sqrt{n} \approx 0.5 \qquad t_{\alpha/2}(f) = t_{0.025}(9) = 2.26$

$I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\cdot d \approx 15.5 \pm 2.26\cdot 0.5 \approx 15.5 \pm 1.1 = (14.4, 16.6)$

Exempel: σ okänd, stort stickprov

$$\boxed{I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{där} \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$95\%\ KI \ \rightarrow\ \alpha = 0.05$

$\lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.025} = 1.96$

$n = 32 \qquad \bar{x} = 42250 \qquad s = 614$

$I_\mu = 42250 \pm 1.96\cdot\frac{614}{\sqrt{32}} = 42250 \pm 212 = (42030\ ;\ 42470)$

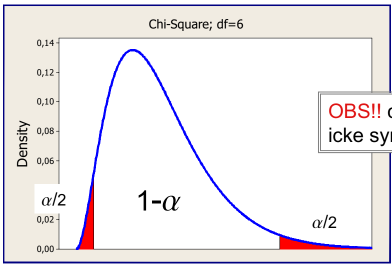
Halvbredd för skattning av μ

Stickprov → σ ↓	stort [CGS]	litet [$X_i \in N$]
känd	$\lambda_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	
okänd	$\lambda_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$	$t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$

Att skatta en standardavvikelse

$$W=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\in\chi^2(n-1)$$

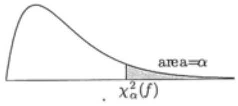
om X_i oberoende och normalfördelade



$\chi^2_{1-\alpha/2}(6)$ $\chi^2_{\alpha/2}(6)$

OBS!! chi-square är icke symmetrisk !

Tabell 4. χ^2-fördelningen
$P(X>\chi^2_\alpha(f))$, där $X\in\chi^2(f)$.



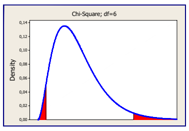
f	α 0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	12.1
2	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	15.2
3	0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	17.7
4	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	20.0
5	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	22.1
6	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	24.1
7	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	26.0
8	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	27.9
9	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	29.7
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	31.4
11	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	33.1
12	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	34.8
13	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	36.5
14	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	38.1
15	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	39.7
16	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	41.3
17	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	42.9
18	4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	44.4
19	4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.1	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	46.0
20	5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.9	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	47.5

Allmän metod

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\in\chi^2(n-1)$$

$$P\left(-\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\le\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}\le+\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=1-\alpha$$



$$I_{\sigma^2}=\left(\frac{f\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(f)},\frac{f\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(f)}\right)\qquad f=n-1$$

$$I_\sigma=\left(\sqrt{\cdots},\sqrt{\cdots}\right)$$

$(1-\alpha)\cdot100\%$ KI

⋆ Exempel för skattning av σ för $N(\mu,\sigma)$

Vi vet att X är normalfördelad, men μ och σ är okända

$\vec{x}=(15.7, 14.3, 12.65, 13.2, 16.85, 16.05, 16.55, 16.05, 16.6, 17.05)$

Sökes: 95% konfidensintervall för σ

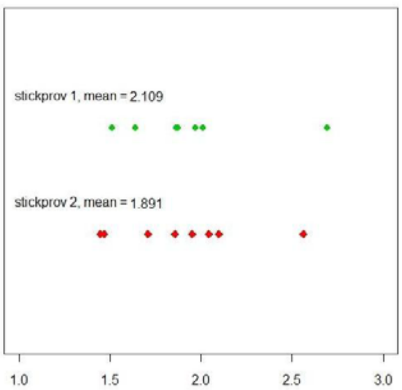
$s=1.56\quad f=9$

$\chi^2_{\alpha/2}(f)\ =\chi^2_{0.025}(9)=19$

$\chi^2_{1-\alpha/2}(f)=\chi^2_{0.975}(9)=2.7$

$$\begin{aligned}I_\sigma&=\left(\sqrt{\frac{f}{\chi^2_{\alpha/2}(f)}}\cdot s,\ \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{1-\alpha/2}(f)}}\cdot s\right)=\left(\sqrt{\frac{9}{19}}\cdot1.56,\ \sqrt{\frac{9}{2.7}}\cdot1.56\right)\\&=(1.07,\ 2.85)\end{aligned}$$

Att skatta en differens mellan medelvärden av två populationer



Att skatta en differens mellan två medelvärden

$\Delta\mu=\mu_X-\mu_Y$ *skattas med* $\bar{X}-\bar{Y}$

$\bar{X}\in N\left(\mu_X,\frac{\sigma_X}{\sqrt{n_X}}\right)\qquad\bar{Y}\in N\left(\mu_Y,\frac{\sigma_Y}{\sqrt{n_Y}}\right)\qquad$ *om* $X_i,Y_i\in N$ *eller* n_X,n_Y *stora*

$\bar{X}-\bar{Y}\in N\left(\mu_X-\mu_Y,\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)\qquad$ *om* $\bar{X}$ *och* $\bar{Y}$ *oberoende* $\to C(X,Y)=0$

$\bar{X}-\bar{Y}\in N(\Delta\mu,D)\qquad$ *förkortningar*

Differens mellan medelvärden

$$\bar{X}-\bar{Y} \in N\left(\mu_X-\mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right) \qquad \text{om } \bar{X} \text{ och } \bar{Y} \text{ oberoende}$$

$$\bar{X}-\bar{Y} \in N(\Delta\mu, D)$$

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\Delta\mu}{D} \in N(0,1) \qquad \text{referensvariabel om } \sigma_X \text{ och } \sigma_Y \text{ kända}}$$

Allmän metod

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\Delta\mu}{D} \in N(0,1) \qquad \text{där} \quad D=\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}$$

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} \le \frac{\bar{x}-\bar{y}-\Delta\mu}{D} \le +\lambda_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x}-\bar{y}-\lambda_{\alpha/2}\cdot D \le \Delta\mu \le \bar{x}-\bar{y}+\lambda_{\alpha/2}\cdot D\right)=1-\alpha$$

$$\boxed{I_{\Delta\mu}=\bar{x}-\bar{y}\pm\lambda_{\alpha/2}\cdot D}$$

Sammanfattning IV

- $\Delta\mu$ skattas med differensen av medelvärden
- båda σ kända och X_i från N eller stora stickprov
- alla X_i oberoende (→ *okorrelerade: enkelt uttryck för differensens stdavv.*)
- (1-α)·100% konfidensintervall:

$$\boxed{I_{\Delta\mu}=\bar{x}-\bar{y}\pm\lambda_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$$

punktskattning ± konstant · medelfel

(1-α)·100% KI för $\Delta\mu$ om σ okänd

Om n_x och n_y är stora (≥ 30), då är s_x och s_y goda approximationer för σ_x och σ_y

$$\boxed{I_{\Delta\mu}=\bar{x}-\bar{y}\pm\lambda_{\alpha/2}\cdot d \qquad \text{där} \quad d=\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}}$$

Exempel för normalapproximation, KI för $\Delta\mu$

Test av två bedövningsmedel A och B, bedövningstiden (minuter):

$A = (195, 240, 154, 95, 65, 82, 132, 155, 125, 119, 155, 345, 145, 200, 130, 223, 145, 207, 183, 190, 137, 210)$

$B = (88, 73, 165, 188, 145, 158, 195, 165, 140, 145, 203, 196, 230, 225, 128, 190, 170, 158, 72, 135, 105, 155, 165, 120$
$138, 125, 188, 145, 208, 75$

99% konfidensintervall för skillnaden mellan medelvärden ?

$\bar{x}_A = 165.09 \quad s_A = 60.96 \quad \bar{x}_B = 153.1 \quad s_B = 43.08 \quad \bar{x}_A - \bar{x}_B = 11.99$

$d = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A}+\frac{s_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{60.96^2}{22}+\frac{43.08^2}{30}} = 15.19 \quad$ (medelfelet)

$1-\alpha = 0.99 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.01 \qquad \lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.005} = 2.58$

$I_{\Delta\mu} = \bar{x}_A - \bar{x}_B \pm \lambda_{\alpha/2}\cdot d = 11.99 \pm 2.58 \cdot 15.19 = (-27, 51)$

Sammanfattning V

- $\Delta\mu$ skattas med differensen av medelvärden
- σ okända men stort stickprov
- alla X_i oberoende
- (1-α)·100% konfidensintervall:

$$\boxed{I_{\Delta\mu}=\bar{x}-\bar{y}\pm\lambda_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}}$$

punktskattning ± konstant · medelfel

Att skatta en differens mellan medelvärden om stickproven är små och om $\sigma_x = \sigma_y$

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \in N(0,1)$$ *differens mellan medelvärden*

här krävs redan oberoendet → C(x,y)=0 i roten

$$W = \frac{(n_X - 1)\cdot S_X^2 + (n_X - 1)\cdot S_X^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n_X + n_Y - 2)$$

här krävs det att $\sigma_x = \sigma_y$ och oberoendet

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n_X + n_Y - 2}}} = \quad \cdots \quad = \boxed{\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \in t(n_X + n_Y - 2)}$$

Referensvariabel

$$S_p^2 = \frac{(n_X - 1)\cdot S_X^2 + (n_Y - 1)\cdot S_Y^2}{(n_X - 1) + (n_Y - 1)}$$

”pooled variance”

Allmän metod

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \in t(f) \qquad f = n_X + n_Y - 2$$

$$P\left(-t_{\alpha/2}(f) \le \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_X - \mu_Y)}{s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \le +t_{\alpha/2}(f)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{x} - \bar{y} - t_{\alpha/2}(f)\cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}} \le \mu_X - \mu_Y \le \bar{x} - \bar{y} + t_{\alpha/2}(f)\cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\boxed{I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f)\cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$$

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ KI för skillnaden mellan medelvärden

Sammanfattning VI

- $\Delta\mu$ skattas med differensen av medelvärden
- σ_i okända men lika, små stickprov
- alla X_i oberoende och normalfördelade
- $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall:

$$I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f)\cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_X - 1)\cdot s_X^2 + (n_Y - 1)\cdot s_Y^2}{(n_X - 1) + (n_Y - 1)} \qquad f = n_X + n_Y - 2$$

punktskattning ± konstant · medelfel

Halvbredd för skattning av $\Delta\mu$

Stickprov → σ_x, σ_y ↓	stort [CGS]	litet [$X_i \in N$]
kända	$\lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}$	
okända	$\lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}}$	$t_{\alpha/2}(n_X + n_Y - 2)\cdot s_P \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}$ $\sigma_x = \sigma_y$

Parade stickprov

Kroppsvikten före och efter juldagarna:

Oberoende stickprov:

Grupp 1, före	70.4	80.1	65.8	66.7	74.3	72.1	70.9	85.4	89.3	90.4	78.9	77.0
Grupp 2, efter	70.9	65.8	66.7	74.3	87.2	89.3	93.4	82.1	74.1	70.9		

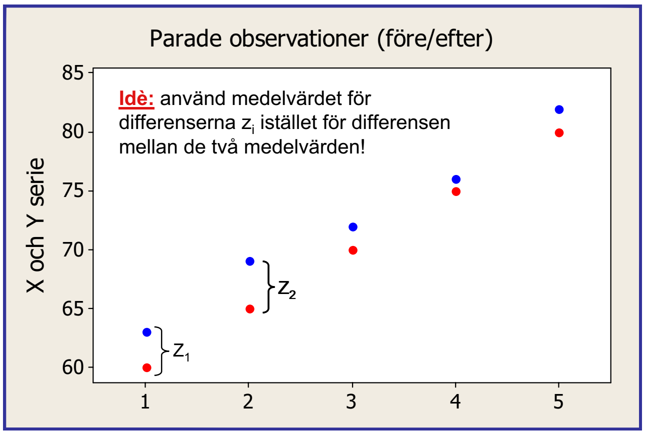
Parade (icke oberoende) stickprov:

person	A	B	C	D	E	F	G	H
före	78.1	66.9	74.3	72.5	90.9	78.3	68.4	72.5
efter	79.2	67.0	77.1	73.3	92.0	78.1	68.4	72.9

Parade stickprov

person	A	B	C	D	E	F	G	H
före (X)	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
efter (Y)	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8

- Ovanstående metod för skattning av $\Delta\mu$ kan inte användas: observationer X_i och Y_i är inte oberoende
  - en persons vikt efter jul är inte oberoende av denna personens vikt före jul !
  - (oberoendet krävs i χ^2 – fördelningen för W och i uttrycket för differensens standardavvikelse, se ovan)



Parade stickprov

person	A	B	C	D	E	F	G	H
före (X)	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
efter (Y)	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8
differens	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8

- X_i och Y_i är inte oberoende
- ... men differenserna Z_i är oberoende
  - viktökningen hos person A är oberoende av viktökningen hos person B osv.

Skattning för $\Delta\mu$, parade observationer

$X_i \in N(\mu_X, \sigma_X) \qquad Y_i \in N(\mu_Y, \sigma_Y)$

$Z_i = Y_i - X_i \quad \rightarrow \quad \boxed{(\Delta\mu)^* = \bar{Z}}$ *Idé för skattning*

$\boxed{E(\bar{Z}) = \mu_Y - \mu_X = \Delta\mu}$ *väntevärdesriktigt*

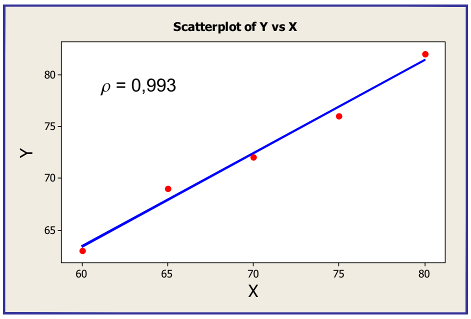
$V(\bar{Z}) = \frac{1}{n}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\cdot\rho\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y) = \frac{\sigma_z^2}{n}$ *konsistent*

$\boxed{D(\bar{Z}) = \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}}}$ se tavlan

$\rho > 0$ *effektivare än oberoende stickprov*

Medelvärdet för Z är alltså en bra skattning för $\Delta\mu$!

X och Y är (positivt) korrelerade



Fördelning för differensen

$E(\bar{Z}) = \mu_Y - \mu_X = \Delta\mu$

$D(\bar{Z}) = \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}}$

$\bar{Z} \in N\left(\Delta\mu, \frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}}\right)$ *normalfördelad, även om X och Y beroende*

$\frac{\bar{Z} - \Delta\mu}{\sigma_Z/\sqrt{n}} \in N(0,1)$ ingen referensvariabel, σ_z okänd

Referensvariabel

$\frac{\bar{Z} - \Delta\mu}{\sigma_Z/\sqrt{n}} \in N(0,1)$

$Z_i \in N(\mu_Z, \sigma_Z)$ *och Z_i oberoende* $\rightarrow \frac{1}{\sigma_Z^2}\sum(Z_i - \bar{Z})^2 \in \chi^2(n-1)$

$W = (n-1)\frac{S_Z^2}{\sigma_Z^2} \in \chi^2(n-1) \qquad S_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum(Z_i - \bar{Z})^2$

$\frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n-1}}} = \ \ldots \ = \boxed{\frac{\bar{Z} - \Delta\mu}{S_Z/\sqrt{n}} \in t(n-1)}$ *referensvariabel*

Allmän metod

$$\frac{\bar{Z}-\Delta\mu}{S_Z/\sqrt{n}} \in t(n-1)$$

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\bar{z}-\Delta\mu}{s_Z/\sqrt{n}} \le +t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{z}-t_{\alpha/2}(f)\cdot\frac{s_Z}{\sqrt{n}} \le \Delta\mu \le \bar{z}+t_{\alpha/2}(f)\cdot\frac{s_Z}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\boxed{I_{\Delta\mu} = \bar{z} \pm t_{\alpha/2}(f)\cdot\frac{s_Z}{\sqrt{n}} \qquad f = n-1}$$

55

Exempel: parade stickprov

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	21.6	22.9	20	23.6	15.7	17.5	27.3	19.8	16.4	14.7	20.1
A	20.2	22	19.7	21.4	16.3	17	24.5	15.6	16	13.2	19
z	1.4	0.9	0.3	2.2	-0.6	0.5	2.8	4.2	0.4	1.5	1.1

Mätningarna antas vara observationer från $N(\mu_j, \sigma_1)$ resp. $N(\mu_j + \Delta, \sigma_2)$ där Δ är den systematiska differensen mellan båda.

$\bar{z} = 1.34 \quad f = n-1 = 10 \quad t_{\alpha/2}(f) = t_{0.025}(10) = 2.23$

$s_z = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2} = 1.33 \quad d = s_z/\sqrt{11} = 0.401$

$I_{\Delta\mu} = \bar{z} \pm t_{\alpha/2}(f)\cdot d = 1.34 \pm 2.23\cdot 0.401 = 1.34 \pm 0.89 = (0.45, 2.23)$

56

Sammanfattning VII

- $\Delta\mu$ för parade observationer skattas med medelvärdet av differenserna Z_i
- σ_i okända, stickprovet kan vara litet
- X_i och Y_i beroende och N-fördelade; Z_i oberoende
- (1-α)$\cdot$100% konfidensintervall:

$$\boxed{\begin{array}{l} I_{\Delta\mu} = \bar{z} \pm t_{\alpha/2}(f)\cdot\frac{s_Z}{\sqrt{n}} \qquad f = n-1 \\ s_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum(z_i - \bar{z})^2 \end{array}}$$

57

Skattning av andelen p

$p^* = \frac{X}{n}$ *punktskattning*

$X \in Bin(n,p) \qquad E(X) = n\cdot p \qquad D(X) = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

X_i måste vara oberoende

$X \in AsN\left(n\cdot p, \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\right)$

$\frac{X}{n} \in N\left(p, \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right) \qquad p \to p_{obs} = \frac{x}{n}$

$$\boxed{\frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{\frac{p_{obs}\cdot(1-p_{obs})}{n}}} \in N(0,1)}$$

referensvariabel om p ersätts med p_{obs} i nämnaren

58

Allmän metod

$$\frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{\frac{p_{obs}\cdot(1-p_{obs})}{n}}} \in N(0,1)$$

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} \le \frac{\frac{x}{n}-p}{\sqrt{\frac{p_{obs}\cdot(1-p_{obs})}{n}}} \le +\lambda_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{x}{n}-\lambda_{\alpha/2}\cdot d \le p \le \frac{x}{n}+\lambda_{\alpha/2}\cdot d\right) = 1-\alpha \qquad d = \sqrt{\frac{p_{obs}\cdot(1-p_{obs})}{n}}$$

$$\boxed{I_p = \frac{x}{n} \pm \lambda_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p_{obs}\cdot(1-p_{obs})}{n}}}$$

(1-α)$\cdot$100% KI

59

Exempel för normalapproximationen för Bin(n,p)

Opinionsunders.: $n = 250, \quad x^*_{obs} = 42$

$p^*_{obs} = x/n = 42/250 = 0.168$

$d = \sqrt{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})/n} = \sqrt{0.168\cdot 0.832/250} = 0.023$

95% konfidensintervall för p: $\quad (\lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.025} = 1.96)$

$$\begin{aligned} I_p &= (p^*_{obs} - \lambda_{\alpha/2}d,\ p^*_{obs} + \lambda_{\alpha/2}d) \\ &= (0.168 \pm 1.96\cdot 0.023) = (0.168 \pm 0.046) \\ &= (0.12, 0.21) \end{aligned}$$

Slh:en är 95% att intervallet 12% .. 21% omfattar det sanna värdet för andelen.

60

Halvbredd för skattning av p

$$I_{\Delta\mu} = \frac{x}{n} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$ halvbredd

$$h = \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

max. för p=1/2

$$n = \frac{\left(\lambda_{\alpha/2}\right)^2 \cdot \overbrace{p\cdot(1-p)}}{h^2} \le \frac{1}{4}\frac{\left(\lambda_{\alpha/2}\right)^2}{h^2}$$

$$\boxed{n = \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_{\alpha/2}}{h}\right)^2}$$

kan räkna ut hur stort stickprovet måste vara för en given bredd av KI:et

om man har förhandskännedom om p kan man kanske precisera värdet för n

Sammanfattning VIII

- andelen p skattas med x/n
- n måste vara tillräckligt stor
- alla X_i måste vara oberoende
- $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall:

$$\boxed{I_p = p_{obs} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_{obs}\cdot(1-p_{obs})}{n}}}$$

$$n = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\lambda_{\alpha/2}}{h}\right)^2$$

Skattning av skillnaden mellan två andelar

$$p_1^* = \frac{X_1}{n_1} \qquad p_2^* = \frac{X_2}{n_2}$$

$$\frac{X_1}{n_1} \in N\left(p_1, \sqrt{\frac{p_1\cdot(1-p_1)}{n_1}}\right) \qquad \frac{X_2}{n_2} \in N\left(p_2, \sqrt{\frac{p_2\cdot(1-p_2)}{n_1}}\right)$$

$$\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} \in N\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1\cdot(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2\cdot(1-p_2)}{n_2}}\right)$$

$$\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} \in N(\Delta p, D) \qquad D \to d \quad \textit{alltså} \quad (p \to p_{obs})$$

$$\boxed{\frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} - \Delta p}{d} \in N(0,1)} \qquad \textit{referensvariabel},\ p_{obs}\ \textit{använd i nämnaren}$$

Allmän metod

$$\frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} - \Delta p}{d} \in N(0,1)$$

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} \le \frac{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2} - \Delta p}{d} \le +\lambda_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2} - \lambda_{\alpha/2}\cdot d \le \Delta p \le \frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2} + \lambda_{\alpha/2}\cdot d\right) = 1-\alpha$$

$$\boxed{I_{\Delta p} = \frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2} \pm \lambda_{\alpha/2}\cdot d} \qquad d = \sqrt{\frac{p_{1,obs}\cdot(1-p_{1,obs})}{n_1} + \frac{p_{2,obs}\cdot(1-p_{2,obs})}{n_2}}$$

Sammanfattning IX

- differensen mellan andelar skattas med x_1/n_1-x_2/n_2
- båda n måste vara tillräckligt stora
- alla X_i måste vara oberoende
- $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall:

$$\boxed{I_{\Delta p} = p_{1,obs} - p_{2,obs} \pm \lambda_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p_{1,obs}\cdot(1-p_{1,obs})}{n_1} + \frac{p_{2,obs}\cdot(1-p_{2,obs})}{n_2}}}$$