Sannolikhet och statistik

Stokastiska variabler

VT 2009

Uwe.Menzel@math.uu.se

http://www.math.uu.se/~uwe/

Stokastisk variabel (slumpvariabel)

Stokastisk variabel, slumpvariabel (s.v.):
Funktion: Resultat av slumpförsök $\Rightarrow$ (reell) tal

$$\boxed{\Omega \Rightarrow \mathbb{R}}$$

Myntkast:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{om } \omega = \text{klave;} \\ 1 & \text{om } \omega = \text{krona.} \end{cases}$$

Exempel för diskreta och kontinuerliga stokastiska variabler

Diskret: s.v kan anta ett ändligt (uppräkneligt ∞) antal olika värden

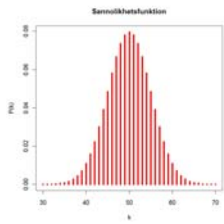
- X = resultat av **en kast** med tärning $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Y = **antalet** femmor i 100 tärningskast $\Omega = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- Z = antalet kast tills man får tre 5:or i rad $\Omega = \{3, 4, \ldots \infty\}$

Kontinuerligt: s.v kan anta alla reella tal i ett intervall

- X = livslängd av en glödlampa $\Omega = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$
- Y = vikt av en regndroppe
- Z = omkrets av ett tillfälligt utvalt träd i en skog

Sannolikhetsfunktion för diskreta slumpvariabler

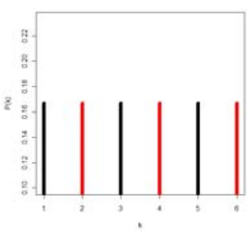
$$p_X(k) = P(X = k)$$



$$p_X(k) \geq 0 \qquad \sum_k p_X(k) = 1$$

Diskreta slumpvariabler: Sannolikhet för händelser

$$P(X \in A) = \sum_{k \in A} p_X(k)$$

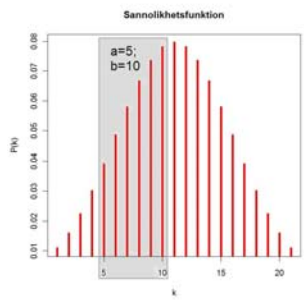


$$P(X \in even) = \sum_{k \in even} p_X(k) = \sum_{k=2,4,6} p_X(k) = p_X(2) + p_X(4) + p_X(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

Diskreta slumpvariabler: Sannolikhet för händelser

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} p_X(k)$$

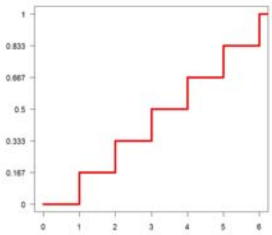
$$P(a < X \leq b) = \sum_{k=a+1}^{b} p_X(k)$$



Villkor: $p_X(k) \geq 0 \;\; \forall\, k$ och $\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$

Diskreta slumpvariabler: Fördelningsfunktion

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} p_X(k)$$

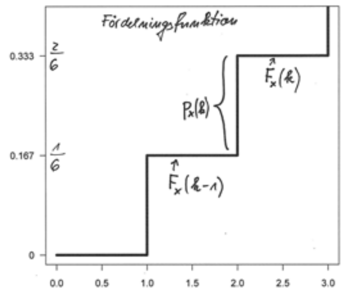


Figur: Fördelningsfunktion för tärning

Diskreta stokastiska variabler: Fördelningsfunktion

$F_X(x) = P(X \le x)$ bestämmer fördelningen entydigt:

$$p_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1)$$



Egenskaper för fördelningsfunktioner

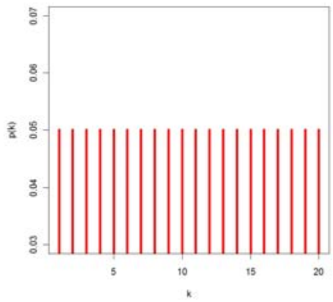
Sats 3.2
För en fördelningsfunktion $F_X(x)$ gäller:

$$F_X(x) \to \begin{cases} 0 & \text{då } x \to -\infty \\ 1 & \text{då } x \to +\infty \end{cases}$$

$F_X(x)$ är en icke-avtagande funktion av x
$F_X(x)$ är kontinuerlig till höger för varje x

Likformig fördelning

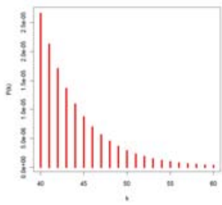
$$p_X(k) = \frac{1}{m} \qquad k = 1, 2, \dots, m$$



Geometrisk fördelning: $X \in Ge(p)$

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p \qquad k = 1, 2, \dots \qquad 0 < p < 1$$

Tärning: Slh. att kasta den första femman i kast (k) $\quad p = 1/6$



Figur: Geometrisk fördelning, täthetsfunktion

Diskret fördelning: Binomialfördelning

Exempel: Låda med 1000 säkringar, 50 är felaktiga

$P(\text{fel}) = 0.05$ och $P(\text{inget fel}) = 0.95$ för varje försök

Tar **5 stycken**: slh. att jag får precis 1 felaktig, 2 felaktiga osv.?

Slumpvariabel X = antalet felaktiga av de 5: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned} P_X(1) &= \binom{5}{1}(0.05)^1(0.95)^4 = 0.203 \\ P_X(2) &= \binom{5}{2}(0.05)^2(0.95)^3 = 0.021 \\ P_X(3) &= \binom{5}{3}(0.05)^3(0.95)^2 = 0.00113 \end{aligned}$$

Binomialfördelning

Slumpvariabel X = antalet felaktiga av n: $\Omega = \{0, 1, \ldots n\}$

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomialfördelning: Förekomst

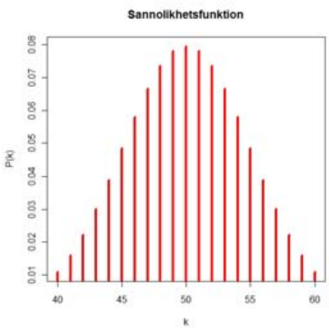
Binomialfördelning: **Bin(n,p)**

- Upprepar ett försök **n** gånger
- Varje enskilt försök kan utfalla på två alternativa sätt (A, B) med sannolikheterna **p** respektive $(1-p)$
- Frågan är: Hur stor är slh. att få resultat A exakt **k** gånger ?
- s.v. X: diskret, $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$$\boxed{p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$0 < p < 1$

Binomialfördelning: Sannolikhetsfunktion



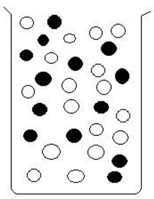

```
sum(dbinom(0:100, 100, 0.5))  # måste vara ett
x<-40:60
X<-dbinom(x, 100, 0.5)
plot(x,X,type="h",lwd=4,col=2,xlab="k",ylab="P(k)",main="Sannolikhetsfunktion")
```

Exempel för binomialfördelning

Fler exempel:

- Antal väljare av totalt 1000 som kommer att rösta på parti A - om det bara finns 2 partier
- Myntkast: antalet kronor i 10 kast
- Antal 6:or i 100 tärningskast $\quad p = 1/6$; $(1-p) = 5/6$
- Urna med (många!) vita och svarta kulor, slh. att dra k svarta kulor utav n.

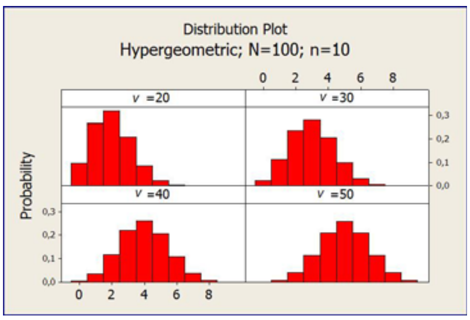
Hypergeometrisk fördelning: $X \in Hyp(N, v, n)$



- N kulor
- v = antalet vita, s = antalet svarta, $N = v + s$
- drar n kulor
- slh. att dra k vita?

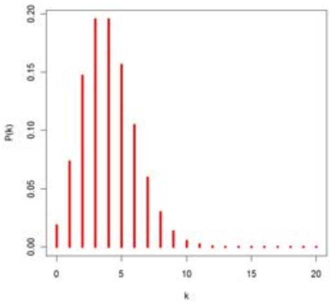
Hypergeometrisk fördelning: $X \in Hyp(N, v, n)$

$$p_X(k) = \frac{\binom{v}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{v+s}{n}} \qquad 0 \le k \le v, \quad 0 \le n-k \le s$$



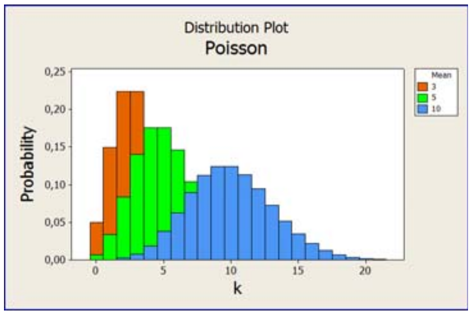
Poissonfördelning: $X \in Po(\mu)$

$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \mu > 0$$



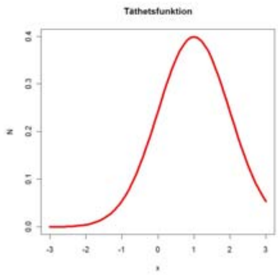
Poissonfördelning: $X \in Po(\mu)$

$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \mu > 0$$



Täthetsfunktion för kontinuerliga slumpvariabler

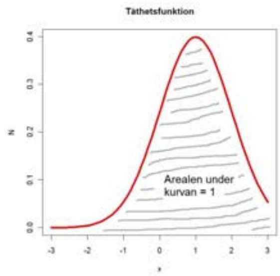
- kan anta alla reella tal i ett visst intervall, t.ex $\Omega = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$
- sannolikhetsmassan 1 läggs ut på reella axeln $\Rightarrow$ täthetsfunktion



Kontinuerliga fördelninger: Villkor för täthetsfunktionen

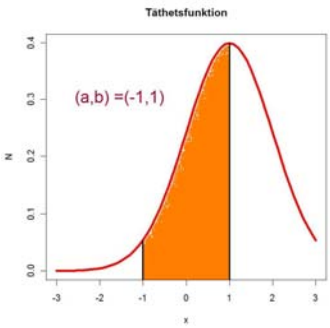
$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$



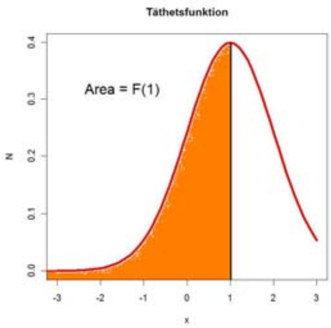
Kontinuerliga fördelninger: sannolikhet att utfallet hamnar i intervallet $(a \leq X \leq b)$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$$



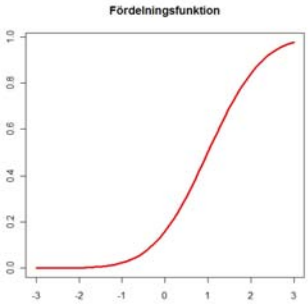
Kontinuerliga fördelninger: Fördelningsfunktion

$$P(-\infty < X \leq x) = P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$



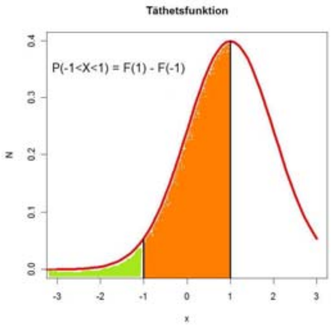
Kontinuerliga fördelninger: Fördelningsfunktion

$$P(-\infty < X \le x) = P(X \le x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$



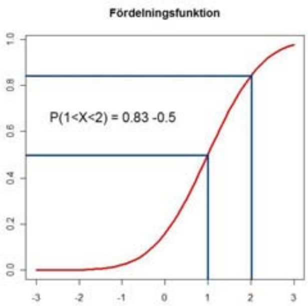
Kontinuerliga fördelninger: Slh. och fördelningsfunktion

$$P(a < X \le b) = \int_{a}^{b} f_X(t)\, dt = F_X(b) - F_X(a)$$



Kontinuerliga fördelninger: Slh. och fördelningsfunktion

$$P(a < X \le b) = \int_{a}^{b} f_X(t)\, dt = F_X(b) - F_X(a)$$

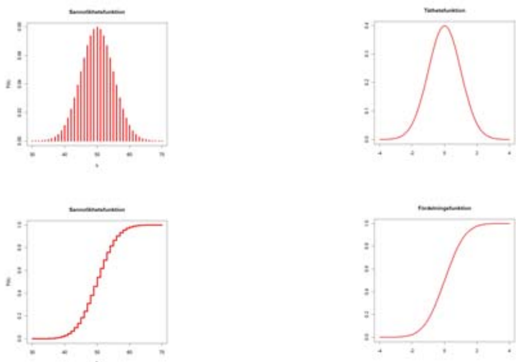


Diskreta slumpvariabler

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} p_X(k)$$

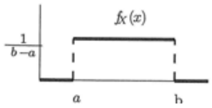
Kontinuerliga slumpvariabler

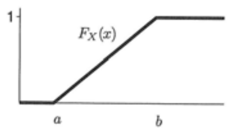
$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$



Likformig kontinuerlig fördelning: $X \in U(a, b)$

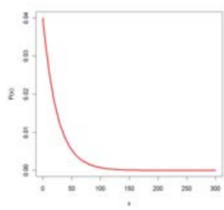
$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{om } \; a < x < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$





Exponentialfördelning: $X \in Exp(\lambda)$

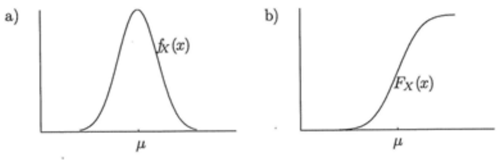
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{om } \; x > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Figur: Radioaktivt sönderfall

Normalfördelning: $X \in N(\mu, \sigma)$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty}$$



Figur: Normalfördelning