UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Jonsson

PROV I MATEMATISK STATISTIK
Sannolikhet och Statistik, W m.fl.
25:e augusti 2008

Kortfattade lösningar

1. Använd att dragningarna är oberoende, exmpelvis som följer:

   (a) P(A och B båda är hjärter) $= P$(A är hjärter) $\cdot P$(B är hjärter) $= 1/4 \cdot 1/4 = 1/16$.

   (b) P(varken A eller B är hjärter) $= P$(A är inte hjärter) $\cdot P$(B är inte hjärter) $= 3/4 \cdot 3/4 = 9/16$.

   (c) P(ett ruter och ett hjärter) $= P$(A hjärter, B ruter)$+P$(B hjärter, A ruter) $= 1/4 \cdot 1/4 + 1/4 \cdot 1/4 = 1/8$.

2. P(planta angrips) $= 0.2$ Inför: $X =$ antalet angripna bland 10 slumpvis utvalda. Då gäller att X har fördelningen Bin$(10, 0.2)$.

   (a) P(alla angripna) $= 0.2^{10} \approx 1 \cdot 10^{-7}$. Med andra ord inträffar detta i ungefär ett fall på tio miljoner.

   (b) P(hälften eller fler är angripna) $= P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4)$. I tabell finner man att $P(X \leq 4) \approx 0.96721$, vilket ger:
   $1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0.96721 = 0.03279$. Chansen är cirka 3%.

   (c) P(tre eller fler är angripna) $= P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0.67780 = 0.32220$. Chansen är cirka 32%.

3. Mätningen X som utförs har fördelningen N$(51.2, 1.5)$ (Det är underförstått att mätfelet har väntevärde 0).

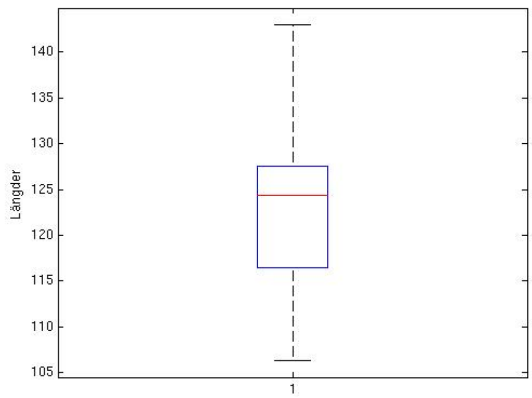
   P(frikänns) $= P(X \leq 47) = \Phi(\frac{47-51.2}{1.5}) \approx \Phi(-2.8) = 1 - \Phi(2.8) \approx 1 - 0.99744 = 0.00256$. Med andra ord är det ungefär en chans på 400 att vederbörande frikänns.

4. $X =$ antalet frön som gror. Då gäller att X är Bin$(140, 0.75)$, samt att $V(X) = 26.25 > 10$, så att det nog är en god idé att approximera med normalfördelning.
   70% av 140 innebär 98 stycken, så att följande gäller:

   P(70% eller fler gror) $= P(X \geq 98) = 1 - P(X \leq 97) \approx 1 - \Phi(\frac{97.5-105}{\sqrt{26.25}}) \approx \Phi(1.46) \approx 0.9279$. Dvs. cirka 93%.

5. Från miniräknare fås medelvärde och stickprovsstandardavvikelse: $\bar{x} = 123.125$, $s = 10.106$. Ett 95% konfidensintervall för μ ges av: $\bar{x} \pm t_{0.025}(19)\frac{s}{\sqrt{20}}$. Från tabell fås att: $t_{0.025}(19) \approx 2.09$, vilket ger intervallet 123.125 ± 4.723, dvs. ungefär $[118.4, 127.8]$.

6. Medianen är som synes cirka 125 och övre och undre kvartil vid övre respektive undre horisontellt streck i lådan. Om datamaterialet hade varit optimalt representativt för en normalfördelning så hade såväl lådan som utbredningsområdet varit centrerade kring medianen. I detta fall finns viss, men ingen extrem, avvikelse från detta.



7. (a) Vi har sex skilda juiceprover med blyhalter $\theta_1, \ldots, \theta_6$. I den första mätserien $x_1, \ldots, x_6$ har vi observationer från normalfördelningar med standardavvikelse σ och väntevärden $\theta_1 + \mu, \ldots, \theta_6 + \mu$. Vi antar alltså här att mätfelen beskrivs som oberoende $N(\mu, \sigma)$.

   (b) Nya observationer $y_1, \ldots, y_6$ från $N(\theta_1 + \tilde{\mu}, \sigma), \ldots, N(\theta_6 + \tilde{\mu}, \sigma)$. Skillnaden här är alltså att vi kalibrerat om så att mätfelen beskrivs som oberoende $N(\tilde{\mu}, \sigma)$.

   (c) Differenserna $z_i = x_i - y_i$, $i = 1, \ldots 6$, utgör pga. det föregående ett stickprov från $N(\mu - \tilde{\mu}, \sigma)$. Vi kan därmed bilda ett konfidensintervall för $\mu - \tilde{\mu}$ med exempelvis konfidensgrad 95%: $I_{\mu - \tilde{\mu}} = \bar{z} \pm \frac{s}{\sqrt{6}} t_{0.025}(5)$.

   $\bar{z} = 5.33$, $s_z = 4.18$, $t_{0.025}(5) = 2.57$ ger $I_{\mu - \tilde{\mu}} = 5.33 \pm 4.38$. Vi ser av detta att vi kan utesluta $\mu - \tilde{\mu} \leq 0$ med åtminstone 95% säkerhet. Således rörde det sig med stor sannolikhet om en uppkalibrering av instrumentet, som bör påverka slutsatser i samband med mätningar av den här typen.