Allan Gut 5 december 2007

Matematik och statistik NV1, VT 2007

Lösningar till Tentamen 14 mars 2007

1. (a) $\binom{12}{3} = 220$ möjliga fall. 10 gynnsamma. Svar: $\frac{1}{22}$.
   (b) OK om 805 i mitten, dvs sann. 1/3. Alltså: $\frac{1}{22} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{66}$.
   (c) # dagar $\in$ Bin$(5, \frac{1}{22})$, dvs $P(\text{minst en}) = 1 - P(\text{ingen} = 1 - (1 - \frac{1}{22})^5 \approx 0.20753$.
   (d) Det finns $\binom{12}{2}$ möjliga sätt att välja 2 platser. 11 av dem är intill varandra. Vid kanterna finns 9 möjliga platser för den tredje, annars 8. Alltså:
$$P(\text{exakt } 2) = \frac{11}{\binom{12}{2}} \cdot \Big(\frac{2}{11} \cdot \frac{9}{11} + \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{11}\Big) = \frac{15}{121}.$$
   (e) Komplementet till (a) och (d). Alltså: $1 - \frac{1}{22} - \frac{15}{121} = \frac{201}{242}$.

2. $X_k \in N(50, 9)$ är pappbakar, $Y_k \in N(30, 4)$ är barnbakar.
   (a) $U = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 \in N(4 \cdot 50 + 6 \cdot 30, 4 \cdot 9 + 6 \cdot 4)$, dvs $N(380, 60)$.
$$P(U \le 350) = \Phi\Big(\frac{350 - 380}{\sqrt{60}}\Big) \approx \Phi(-3.87) = 1 - \Phi(3.87) \approx 1 - 0.9999 = 0.0001.$$
   (b) $V = X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 \in N(3 \cdot 50 + 6 \cdot 30, 3 \cdot 9 + 6 \cdot 4)$, dvs $N(330, 51)$.
$$P(V \le 350) = \Phi\Big(\frac{350 - 330}{\sqrt{51}}\Big) \approx \Phi(2.8) \approx 0.9974.$$

3. Antag n patienter, $X = \#$ besvärsfria i minst 10 år $\in$ Bin$(n, 0.9)$.
   $Y = \#$ som inte är besvärsfria i minst 10 år $\in$ Bin$(n, 0.1)$.
   (a) $X \in$ Bin$(10, 0.9)$, $Y \in$ Bin$(10, 0.1)$.
$$P(X \ge 9.5) = P(X = 10) = P(Y = 0) = 0.34868.$$
   (b) $X \in$ Bin$(40, 0.9)$, $Y \in$ Bin$(40, 0.1) \approx$ Po(4).
$$P(X \ge 38) = P(Y \le 2) \approx 0.23810.$$
   (c) $X \in$ Bin$(400, 0.9) \approx N(360, 36)$.
$$P(X \ge 380) = 1 - P(X \le 379) \approx 1 - \Phi\Big(\frac{379 + \frac{1}{2} - 360}{6}\Big) \approx 1 - \Phi(3.25)$$
$$\approx \quad 1 - 0.99942 = 0.00058.$$

4. Skillnaden mellan två oberoende normalfördelningar.
   (a) Hanar: $X_i \in N(\mu_1, \sigma^2)$, honor: $Y_i \in N(\mu_2, \sigma^2)$.
   $\sum x_i = 111.32$, $\sum x_i^2 = 2479,546$, $\sum y_i = 110.24$, $\sum y_i^2 = 2431,0854$
   $\bar{x} = 22.264$, $\bar{y} = 22.048$, $s_1^2 = 0.27938$, $s_2^2 = 0.12847$,
   $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{4 \cdot 0.27938 + 4 \cdot 0.12847}{8} = 0.203925 \approx 0.204$.
   Ett 95 % konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$: $I_{\mu_1-\mu_2} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{8,0.025} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}$
$$\Longrightarrow \quad 22.264 - 22.048 \pm 2.306\sqrt{0.204}\sqrt{\tfrac{2}{5}} \quad \longrightarrow \quad (-0.44, 0.88)\,.$$
   (b) Eftersom $0 \in I_{\mu_1-\mu_2}$ så kan vi inte hävda att det är någon skillnad mellan hanars och honors vikt.

5. Parade observationer. Naturligast är enkelsidigt test.

$$z = \mathsf{Nya} - \mathsf{Gamla}: \quad 5 \quad 0 \quad 5 \quad 15 \quad -20 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 5 \quad 5\,.$$

(a) Före: $X_i \in N(\mu_i, \sigma^2)$, efter: $Y_i \in N(\mu_i - \delta, \sigma^2)$. $Z_i = X_i - Y_i \in N(\delta, 2\sigma^2)$.
Blodtrycks*sänkande*, dvs $H_0 : \delta = 0$, $H_1 : \delta > 0$.
$\sum z_i = 40$, $\sum z_i^2 = 950$, $\bar{z} = 4$, $s^2 = 87.778$, $s = 9.369$.
$t_{9,0.05} = 1.833$, $t_{\text{obs}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{87.778}{10}}} \approx 1.35 < 1.833$.
Resultatet är icke-signifikant; vi kan inte hävda att medlet har önskad effekt.

(b) Teckentest.

$$\mathsf{Före} - \mathsf{Efter}: \quad + \quad 0 \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$$

Under H_0 är $X =$ antalet plustecken $\text{Bin}(9, \frac{1}{2})$. (Nollan tas bort.)

$$P(Z \geq 8) = 1 - P(Z \leq 7) \approx 1 - 0.98047 = 0.01953 < 0.05.$$

H_0 förkastas.

(c) Att det blir (kan bli) olika resultat beror på att teckentestet är svagare — när man VET att normalfördelning föreligger.

6. χ^2-test för oberoende. H_0 : Oberoende, H_1 : Inte oberoende. 1 frihetsgrad. $\chi^2_{1,0.05} = 3.84$.

O	19	115	10	32
E	22.08	111.92	6.92	35.08
$O - E$	3.08	3.08	3.08	3.08
$(O - E)^2$	9.4864	9.4864	9.4864	9.4864
$\frac{(O-E)^2}{E}$	$\frac{9.4864}{22.08}$	$\frac{9.4864}{111.92}$	$\frac{9.4864}{6.92}$	$\frac{9.4864}{35.08}$

Addition av talen i sista raden ger $\chi^2_{\text{obs}} \approx 2.156 < 3.84$. H_0 förkastas ej. Man kan, utgående från dessa data, inte hävda att kvinnliga och manliga domare beter sig olika.

Allan Gut
Uppsala University
Department of Mathematics
Box 480
SE-751 06 Uppsala, Sweden

Office: 74105, The Ångström Laboratory
email: allan.gut@math.uu.se
Phone: +46-(0)18-471 3182
FAX: +46-(0)18-471 3201
URL: http://www.math.uu.se/~allan