Allan Gut 5 december 2007

Matematik och statistik NV1, VT 2007

Lösningar till Tentamen 8 juni 2007

1. (a) $1 - P(\text{misslyckas 3 ggr}) = 1 - (\frac{3}{4})^3 = \frac{37}{64} \approx 0.5781$.

   (b) $P(\text{misslyckas } n \text{ ggr}) = (\frac{3}{4})^n \leq 0.05$, dvs $n \geq \frac{\log 0.05}{\log 0.75} \approx 10.41$. Alltså: Minst 11 försök.

   (c) $P(N = n) = \frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Kallas ffg-fördelning.

2. $X_1, X_2, \ldots, X_7 \in N(150, 20^2)$, $Y \in N(1000, 50^2)$. Alla oberoende.

   (a) $U = X_1 + X_2 + \ldots + X_7 + Y \in N(7 \cdot 150 + 1000, 7 \cdot 20^2 + 50^2)$, dvs $N(2050, 5300)$.

   $$P(U \leq 2000) = \Phi\Big(\frac{2000 - 2050}{\sqrt{5300}}\Big) \approx \Phi(-0.687) = 1 - \Phi(0.687) \approx 1 - 0.7539 = 0.2461.$$

   (b) $V = X_1 + X_2 + \ldots + X_6 + Y \in N(6 \cdot 150 + 1000, 6 \cdot 20^2 + 50^2)$, dvs $N(1900, 4900)$.

   $$P(V \leq 2000) = \Phi\Big(\frac{2000 - 1900}{\sqrt{4900}}\Big) \approx \Phi(1.429) \approx 0.9234.$$

3. Antag n patienter, $X = \#$ som tillfrisknar $\in$ Bin$(n, 0.8)$.
   $Y = \#$ som inte tillfrisknar $\in$ Bin$(n, 0.2)$.

   (a) $X \in$ Bin$(12, 0.8)$, $Y \in$ Bin$(12, 0.2)$.

   $$P(X \geq 10.8) = P(X \geq 11) = P(Y \leq 1) = 0.2749.$$

   (b) $X \in$ Bin$(150, 0.8) \approx N(120, 24)$.

   $$P(X \geq 135) = 1 - P(X \leq 134) \approx 1 - \Phi\Big(\frac{134 + \frac{1}{2} - 120}{\sqrt{24}}\Big) \approx 1 - \Phi(2.9598)$$
   $$\approx \quad 1 - 0.9985 = 0.0015.$$

4. Parade observationer.

   $z =$ Burkade $-$ Färska: 0.019 0.009 0.022 0.020 0.022 0.008 0.008 0.005 -0.002 0.006.

   (a) Färska: $X_i \in N(\mu_i, \sigma^2)$, burkade: $Y_i \in N(\mu_i + \delta, \sigma^2)$. $Z_i = Y_i - X_i \in N(\delta, 2\sigma^2)$.
   $\bar{z} = 0.0117$, $s^2 = 0.00007056$, $s = 0.0084$, $t_{9,0.025} = 2.262$.
   Ett 95 % konfidensintervall för δ: $I_\delta = \bar{z} \pm t_{9,0.025} \cdot \frac{s}{\sqrt{10}}$

   $$\Longrightarrow \quad 0.0117 \pm 2.262 \cdot \frac{0.0084}{\sqrt{10}} \quad \longrightarrow \quad (0.0057, 0.0177).$$

   (b) $0 \notin I_\delta$, dvs vi kan dra slutsatsen att det är skillnad. Att intervallet ligger till höger om 0 visar att kopparhalten är högre i burkade tomater.

5. (a) Normalfördelningstest. Okänd varians, t-test $X_i \in N(\mu, \sigma^2)$.

   $$H_0 : \mu = 68, \quad H_1 : \mu \neq 68.$$

   $\bar{x} = 69.15$, $s^2 = 7.74055$, $s = 2.782$, $t_{9,0.25} = 2.262$.
   Testvariabel $t = \frac{\bar{x} - 68}{s/\sqrt{n}} \in t(9)$ under H_0. Kritiskt område: $|t| > t_{9,0.25}$.
   $t_{\text{obs}} = 1.3071 < 2.262$, dvs icke-signifikant.

   (b) Nu "vet vi" att $X \in N(69, 9)$.

   $$\begin{aligned} \text{Styrka} \quad &= \quad P_{69}(\text{förkasta } H_0) = P_{69}\Big(\Big|\frac{\bar{X} - 68}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{0.25}\Big) = 1 - P_{69}\Big(\Big|\frac{\bar{X} - 68}{3/\sqrt{10}}\Big| < 1.96\Big) \\ &= \quad 1 - P_{69}\big(-1.96 - \frac{1}{3/\sqrt{10}} < \frac{\bar{X} - 69}{3/\sqrt{10}} < 1.96 - \frac{1}{3/\sqrt{10}}\big) = 1 - \Phi(1.02) + \Phi(-2.9) \\ &= \quad 1 - 0.8461 + 1 - 0.99813 = 0.15577. \end{aligned}$$

6. χ^2-test för homogenitet H_0 : Homogent, H_1 : Inte homogent. χ^2-test, $\chi^2_{1,0.05} = 3.84$.

O	458	755	412	788
E	437,34	775,66	432,66	767,34
$O - E$	20,66	-20,66	-20,66	20,66
$(O - E)^2$	426,84	426,84	426,84	426,84
$\frac{(O-E)^2}{E}$	$\frac{426,84}{437,34}$	$\frac{426,84}{775,66}$	$\frac{426,84}{432,66}$	$\frac{426,84}{767,34}$

Addition av talen i sista raden ger ger $\chi^2_{\text{obs}} \approx 3,069 < 3.84$.

Nollhypotesen förkastas sålunda ej, det finns inte fog för påståendet om en förändring från april till maj.

Allan Gut
Uppsala University
Department of Mathematics
Box 480
SE-751 06 Uppsala, Sweden

Office: 74105, The Ångström Laboratory
email: allan.gut@math.uu.se
Phone: +46-(0)18-471 3182
FAX: +46-(0)18-471 3201
URL: http://www.math.uu.se/~allan