UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Uwe Menzel
uwe.menzel@math.uu.se

Tentamen VT09
Sannolikhet och statistik
1MS005
2009–08–20

OBS! Lösningarna ska vara motiverade. Välj lämpliga beteckningar för sannolikheter och andra förekommande storheter. Hjälpmedel: miniräknare och formelsamling.

Uppgift 1 5 poäng

Sannolikhetsfunktionen för en diskret slumpvariabel X är definerad på följande sätt:

$$p_X(k) = k/10 \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

a) Ange fördelningsfunktionen för X i form av en tabell (1P)

b) Beräkna väntevärdet för X (1P)

c) Beräkna variansen för X (1P)

d) Beräkna väntevärdet för slumpvariabeln $Y = 2 \cdot X^2$ (1P)

e) Beräkna $P(Y > 10)$ (1P)

Uppgift 2 6 poäng

Det är känt att 10 % av hela befolkningen bär på en lindrig ärftlig sjukdom $[P(S) = 0.1]$. Ett företag har utvecklat ett enkelt och prisvärt test för att fastställa denna sjukdom. Testet är dock inte perfekt: sannolikheten att testresultatet blir negativt trots att sjukdomen föreligger är 20% $[P(N|S) = 0.2]$. Dessutom är sannolikheten att testresultatet blir positivt trots att sjukdomen *inte* föreligger 10% $[P(P|S^*) = 0.1]$. En person testas och resultatet blir positivt. Hur stor är sannolikheten att denna person verkligen bär på sjukdomen? Tips: vi söker alltså $P(S|P)$.

Uppgift 3 4 poäng

En slumpvariabel X har följande täthetsfunktion:

$$f(x) = e^{-x} \qquad 0 \le x < \infty$$

Ange det numeriska värdet för kvantilen $x_{0.1}$ (som också kallas 90% percentil).

Uppgift 4 6 poäng

I ett laboratorium framställs avancerade kristaller som måste ha en mycket hög renhetsgrad. Renhetsgraden beror av slumpen och mäts först efter framställningsprocessen. Av lång erfarenhet är det känt att bara 10% av alla tillverkade kristaller har renhetsgraden som krävs. Anta att alla försök att framställa rena kristaller är oberoende av varandra.

a) Hur är antalet kristaller med hög renhetsgrad (= slumpvariabel X) fördelat? (1P)

b) Om man framställer 10 kristaller per dag: Vad är sannolikheten att exakt en av dem har hög renhet? (1P)

c) Om man framställer 10 kristaller per dag: Vad är sannolikheten att minst två av dem har hög renhet? (2P)

d) Hur många kristaller måste man framställa om sannolikheten att få minst en kristall med hög renhet ska vara större än 0.9? (2P)

Uppgift 5 6 poäng

En maskin framställer kullager. Deras diameter (= s.v. X) är normalfördelad med väntevärdet $\mu = 300$ och standardavvikelsen $\sigma = 1$ (i mm). Om ett kullagers diameter avviker mer än 1.5 mm från 300 mm anses det som skrot.

a) Hur stor är sannolikheten att ett slumpmässigt valt kullager är skrot? (3P)

b) Till vilket värde måste standardavvikelsen σ minst reduceras för att få högst 5% skrot? (3P)

Uppgift 6 4 poäng

En normalfördelad storhet mättes 14 gånger. Man kom fram till följande resultat: stickprovsmedelvärde $\bar{x} = 32132$; stickprovsstandardavvikelse $s = 2595$.

Ange en skattning för storhetens medelvärde, inklusive 99% konfidensintervall.

Uppgift 7 4 poäng

Två tillverkare av glödlampor påstår att deras respektive produkt har längst livstid. För att pröva detta valdes slumpmässigt 100 glödlampor av varje tillverkare; deras livslängd testades därefter. Man kom fram till följande resultat (i timmar):

- tillverkare 1: $\bar{x} = 798$ och $s_x = 2.8$ (medelvärde resp. standardavvikelse)
- tillverkare 2: $\bar{y} = 826$ och $s_y = 3.0$ (medelvärde resp. standardavvikelse)

Ange ett 95% konfidensintervall för skillnaden mellan båda medelvärden. Kan man pga. resultatet påstå att någon tillverkare verkligen framställer glödlampor med längre livstid?

Uppgift 8 5 poäng

Koncentrationerna av kväveoxid och koldioxid mättes på Kungsgatan i Uppsala under en vecka. Mätvärdena visas i följande tabell (i $\mu g/m^3$):

dag	1	2	3	4	5	6	7
Kväveoxid	106	113	86	73	61	80	81
Koldioxid	108	118	89	71	66	83	83

En hypotes är att båda föroreningarna alltid uppträder i samma koncentration. Ange ett 95% konfidensintervall för skillnaden mellan medelvärderna av båda koncentrationer. Kan man pga. ditt resultat förkasta ovanstående hypotes? (Koncentrationerna får antas vara normalfördelade.)