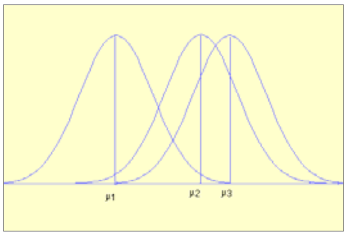
Variansanalys

ANOVA



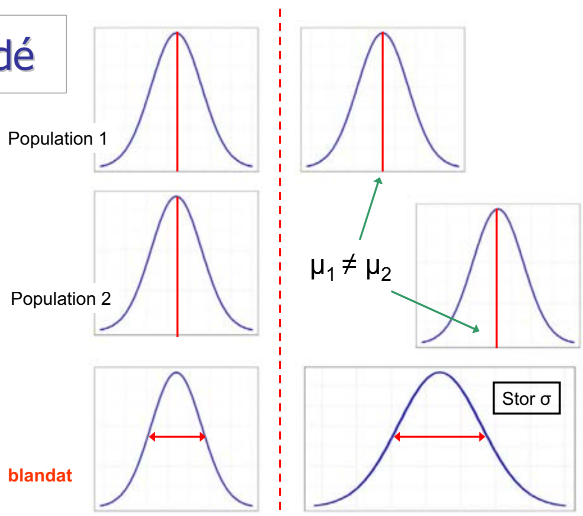
uwe.menzel@math.uu.se

ANOVA - ANalysis Of VAriance

- Stickprov från flera populationer (≥ 2)
- analyserar variansen (spridningen) i varje stickprov för att dra slutsatser om medelvärden
- Har alla populationer samma medelvärden?
- om testvariabeln blir signifikant stor:
  - *minst en* population har ett avvikande medelvärde
  - (även om man inte vet vilken population det var)

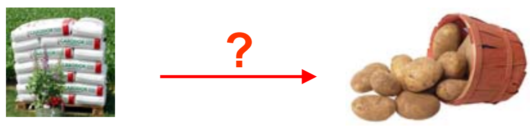
Hur kan man använda varianserna för att uttala sig om medelvärden ??
→ *se nästa sida*

Idé



Experiment med flera populationer

- Undersökning om en oberoende variabel (”faktor”) har inflytande på en beroende variabel
  - Mängd gödsel → mängd skördade potatis
- Faktor: gödsel
  - Level: 300 mg/m²; 500 mg/m²; 700 mg/m²
- Finns en effekt av gödsel på skörden?
- En faktor → One-way ANOVA

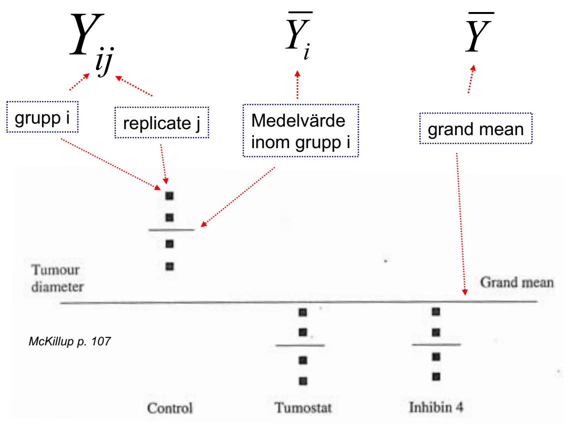


Beteckningar

Treatment 1 Population 1 (grupp 1)	Treatment 2 Population 2 (grupp 2)	Treatment 3 Population 3 (grupp 3)
Y_{11}	Y_{21}	Y_{31}
Y_{12}	Y_{22}	Y_{32}
Y_{13}	Y_{23}	Y_{33}
Y_{14}	Y_{24}	Y_{34}
…	…	…
(n_1 replicates)	(n_2 replicates)	(n_3 replicates)

3 treatments → 3 populationer, 3 grupper

Beteckningar



Nollhypotes, alternativ hypotes

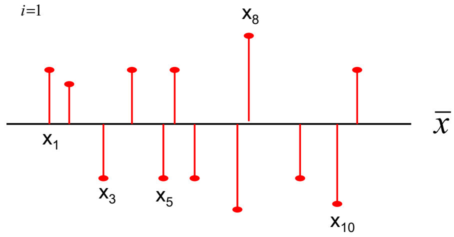
H_0: alla grupper har samma medelvärde

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \quad \ldots \quad \mu_k$$

H_a: minst ett likhetstecken gäller *inte*

Sum of Squares

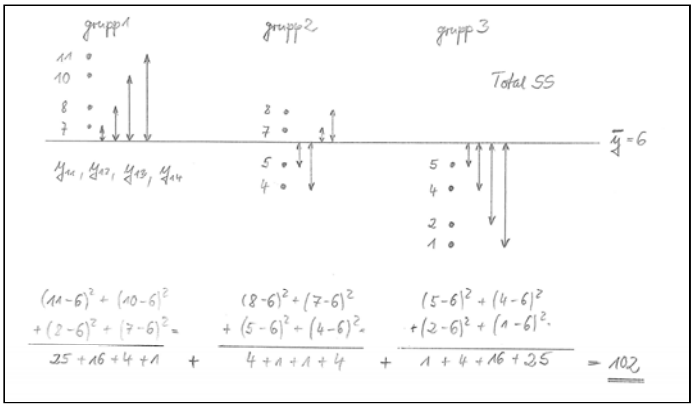
$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$



"Sum of Squares" används för att beskriva spridningen (proportionell till stickprovsvariansen)
Det finns flera sorter som används för ANOVA → *följande sidor*

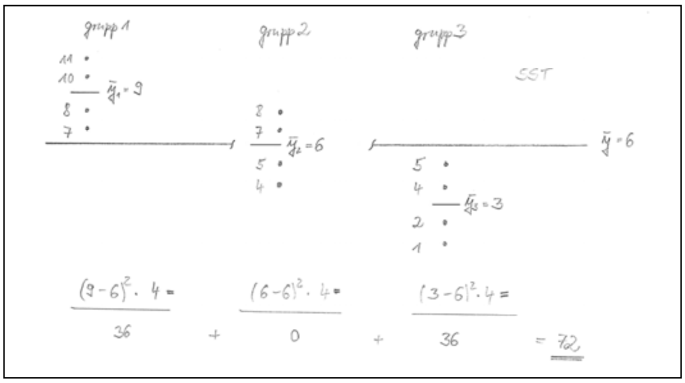
Total Sum of Squares

$$Total\ SS = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2$$



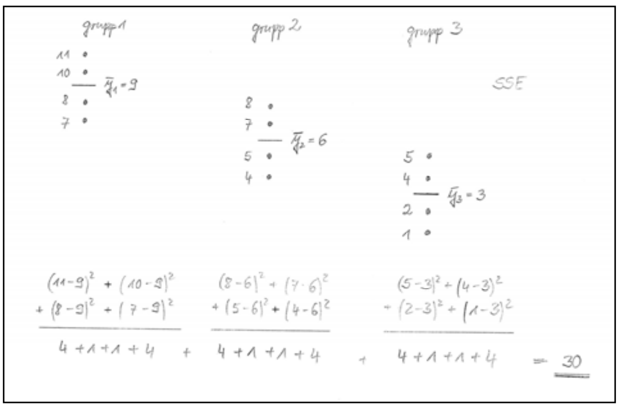
Sum of Squares for Treatments

$$SST = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$$



Sum of Squares for Error

$$SSE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$



Att dela upp variationen

$$Total\ SS \quad = \quad SST \quad + \quad SSE$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

Total SS = Total Sum of Squares
SST = Sum of Squares for Treatments
SSE = Sum of Squares for Error

k – antalet grupper (populationer)
n_i – antalet replicates i grupp i

Hur räknar man?

$$SST = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 \qquad SSE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2$$

$$MST = \frac{SST}{df} = \frac{SST}{k-1} \qquad MSE = \frac{SSE}{df} = \frac{SSE}{n-k}$$

"mean square"

$$F = \frac{MST}{MSE} \in F(k-1, n-k)$$

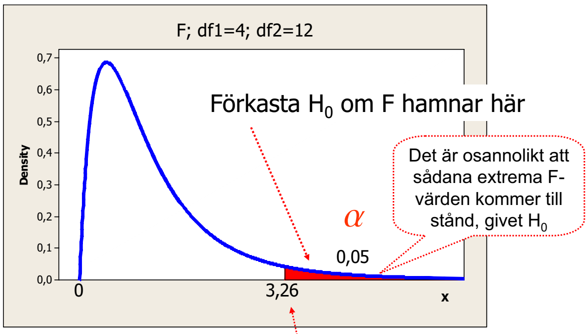
under H_0

Testvariabel F

F-fördelning med
- k-1 frihetsgrader i täljaren (numerator)
- n-k frihetsgrader i nämnaren (denominator)

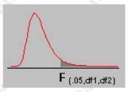
F blir stor om någon grupps medelvärde avviker tillräckligt mycket.

One-tailed F-test



Kvantil $F_{k-1,n-k}$

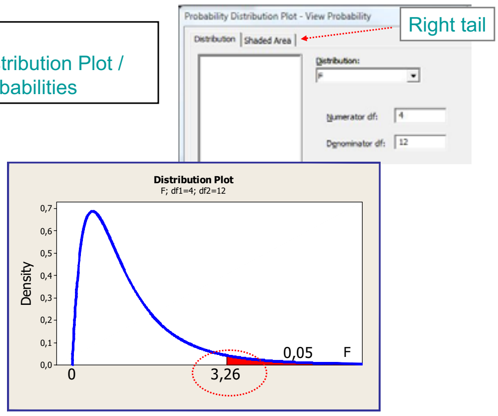
Tabell F-fördelning



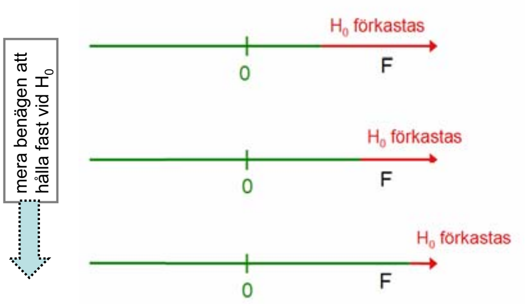
df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	1
1	161.4476	199.5000	215.7073	224.5832	230.1619	233.9860	236.7684	238.8827	240.5433	241.8817	243.9060	245.
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959	19.4125	19.
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644	5.9117	5.
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600	3.9999	3.
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.9130	2.
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962	2.8536	2.7876	2.
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.6710	2.6037	2.
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.

Kvantil i Minitab

Graph /
Prob. Distribution Plot /
View Probabilities



Kritiska områden för olika signifikansnivåer (F test)



värdena för det kritiska området beror också på antalet "frihetsgrader" i täljaren och i nämnaren

One-way ANOVA

1. Hypotes H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$
2. Signifikansnivå: $\alpha = 0.05$ $\quad \Omega_{krit} = \{ F > F_\alpha(k-1, n-k) \}$
3. Stickprov $\quad SST = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 \quad SSE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2 \quad MST = \frac{SST}{df} = \frac{SST}{k-1} \quad MSE = \frac{SSE}{df} = \frac{SSE}{n-k}$
4. Testvariabel $\quad F = \frac{MST}{MSE} \in F(k-1, n-k)$
5. Förkasta H_0 om $F \in \Omega_{krit}$

SST och SSE kan beräknas med hjälp av s och medelvärden

givna : $n_i \quad \bar{Y}_i \quad S_i \quad \forall i$

$$SST = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 \qquad \bar{Y} = \frac{n_1 \cdot \bar{Y}_1 + n_2 \cdot \bar{Y}_2 + \ldots + n_k \cdot \bar{Y}_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

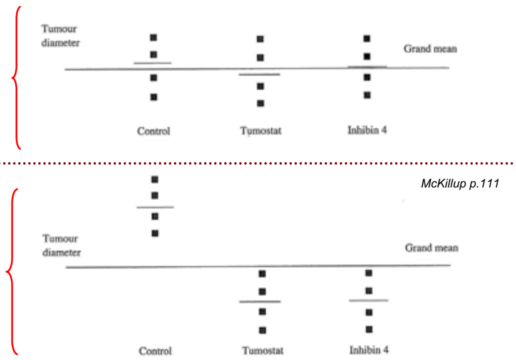
$$SSE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \cdot S_i^2$$

Dessa uttryck behövs när man inte har själva mätvärdena, utan bara antalen, medelvärdena och standardavvikelserna (eller varianserna).

Hur kommer man på detta? (Illustration)

Liten skillnad mellan grupper

Stor skillnad mellan grupper



$$SST = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 \qquad SSE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2 \qquad F = \frac{SST / (k-1)}{SSE / (n-k)} \in F(k-1, n-k)$$

Om det finns en effekt av någon treatment då blir SST stort jämfört med SSE → F blir stor (→ förkasta H_0)

Hur kommer man på detta? (Teori)

Wackerly p.640 Ex 13.6

Under H_0 gäller:

$$\frac{SSE}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \cdot S_i^2 = \underbrace{\underbrace{\frac{(n_1 - 1) \cdot S_1^2}{\sigma^2}}_{\text{df}=n_1-1} + \underbrace{\frac{(n_2 - 1) \cdot S_2^2}{\sigma^2}}_{\text{df}=n_2-1} + \ldots + \underbrace{\frac{(n_k - 1) \cdot S_k^2}{\sigma^2}}_{\text{df}=n_k-1}}_{\text{antalet } Z^2\text{-fördelade}} \in \chi^2(n-k)$$

$$\frac{SST}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 \in \chi^2(k-1)$$

Visas med hjälp av fördelningen för TotalSS, Wackerly Ex 13.6

$$F = \frac{MST}{MSE} = \frac{SST / (k-1)}{SSE / (n-k)} = \frac{\dfrac{SST}{\sigma^2 (k-1)}}{\dfrac{SSE}{\sigma^2 (n-k)}} \in \frac{\dfrac{\chi^2(k-1)}{k-1}}{\dfrac{\chi^2(n-k)}{n-k}} \in F(k-1, n-k)$$

Definition för F
Wackerly p. 340 Teorem 7.3

Räkneexempel (för bara två grupper)

T1	*T2*
6.1	9.1
7.1	8.2
7.8	8.6
6.9	6.9
7.6	7.5
8.2	7.9

⇨

T1	*T2*
Y_{11}	Y_{21}
Y_{12}	Y_{22}
Y_{13}	Y_{23}
Y_{14}	Y_{24}
Y_{15}	Y_{25}
Y_{16}	Y_{26}

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{6}(6.1 + 7.1 + 7.8 + 6.9 + 7.6 + 8.2) = 7.2833$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{6}(9.1 + 8.2 + 8.6 + 6.9 + 7.5 + 7.9) = 8.0333$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{12}(6.1 + 7.1 + 7.8 + 6.9 + 7.6 + 8.2 + 9.1 + 8.2 + 8.6 + 6.9 + 7.5 + 7.9) = 7.6583$$

Räkneexempel

$\bar{Y}_1 = 7.2833 \qquad \bar{Y}_2 = 8.0333 \qquad \bar{Y} = 7.6583$

$$SST = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 = n_1\left(\bar{Y}_1 - \bar{Y}\right)^2 + n_2\left(\bar{Y}_2 - \bar{Y}\right)^2$$
$$= 6 \cdot (7.2833 - 7.6583)^2 + 6 \cdot (8.0333 - 7.6583)^2$$
$$= 1.6875$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{6}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2 = \sum_{j=1}^{6}\left(Y_{1j} - \bar{Y}_1\right)^2 + \sum_{j=1}^{6}\left(Y_{2j} - \bar{Y}_2\right)^2 =$$
$$= \left(Y_{11} - \bar{Y}_1\right)^2 + \left(Y_{12} - \bar{Y}_1\right)^2 + \left(Y_{13} - \bar{Y}_1\right)^2 + \left(Y_{14} - \bar{Y}_1\right)^2 + \left(Y_{15} - \bar{Y}_1\right)^2 + \left(Y_{16} - \bar{Y}_1\right)^2 +$$
$$\left(Y_{21} - \bar{Y}_2\right)^2 + \left(Y_{22} - \bar{Y}_2\right)^2 + \left(Y_{23} - \bar{Y}_2\right)^2 + \left(Y_{24} - \bar{Y}_2\right)^2 + \left(Y_{25} - \bar{Y}_2\right)^2 + \left(Y_{26} - \bar{Y}_2\right)^2$$
$$= 5.8617$$

Total SS = SST + SSE ?

$$Total\ SS = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{6}\left(Y_{ij} - \bar{Y}\right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{6} Y_{ij}^2 - \frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{6} Y_{ij}\right)^2 = 711.35 - \frac{1}{12}(91.9)^2 = 7.55$$

$$\boxed{SST + SSE = 1.69 + 5.86 = 7.55}$$

Räkneexempel, forts.

$SST = 1.6875 \qquad SSE = 5.8617 \qquad n = n_1 + n_2 = 12 \qquad k = 2$

$$MST = \frac{SST}{k-1} = \frac{1.6875}{1} = 1.6875$$
$$MSE = \frac{SSE}{n-k} = \frac{5.8617}{10} = 0.5862$$
$$F = \frac{MST}{MSE} = \frac{1.6875}{0.5862} = 2.8787$$

Testvariabel → kolla om den ligger i RR

Kritiska värden för F-fördelningen

Signifikans: α = 0.05

k-1=1

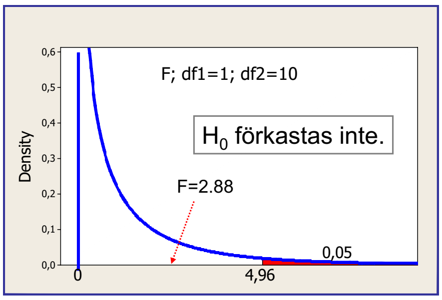
n-k=10

F_α = 4.96

TABLE 6(a) Values of $F_{0.05}$

ν_2 = Degrees of freedom for denominator	ν_1 = Degrees of freedom for numerator												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46

Resultat

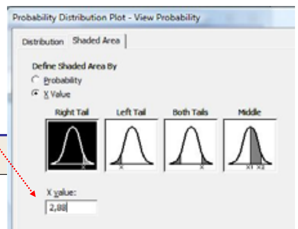


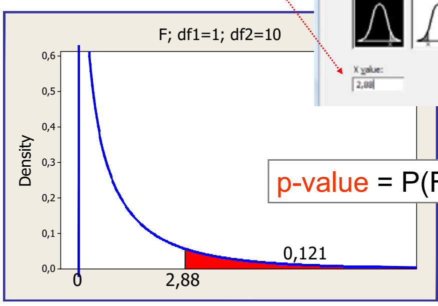
Det finns ingen signifikant skillnad mellan båda grupper (på signifikansnivå α = 0.05).

Resultat: p-värdet

p-value = P(F > 2.88)

testvariabelns värde

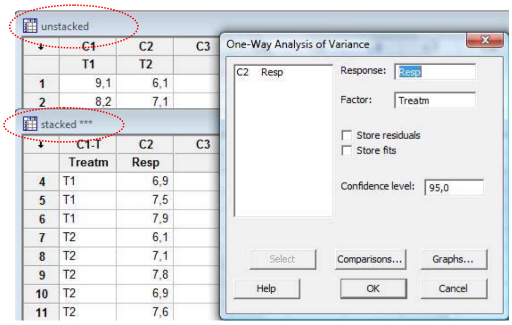




p-value = P(F > 2.88)=0,121

One-way ANOVA i Minitab

Stat / ANOVA / One-Way   eller One-Way unstacked



Minitab: ANOVA table

Frihets grader   Sum of Squares   Mean squares   testvariabel   P-värdet

Source	DF	SS	MS	F	P
Treatm	1	1,687	1,687	2,88	0,121
Error	10	5,862	0,586		
Total	11	7,549			

1,687/0,586=2,88

1+10=11

5,862/10=0,586

1,687+5,862=7,549

ANOVA table

ANOVA Table

Source of Variation	SS	df	MS	F
Between	$SS_{between}=\sum_{j=1}^{j} n_j\left(\bar{Y}_j-\bar{Y}\right)^2$	$j-1$	$MS_{between}=\dfrac{SS_{between}}{j-1}$	$\dfrac{MS_{between}}{MS_{within}}$
Within	$SS_{within}=\sum_{j=1}^{j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_j\right)^2$	$n-j$	$MS_{within}=\dfrac{SS_{within}}{n-j}$	
Total	$SS_{total}=\sum_{j=1}^{j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(Y_{ij}-\bar{Y}\right)^2$	$n-1$		

Source: Daniel Heaton, MBA, ANOVA_Heaton.ppt

T-test

- Om man bara har två grupper funkar naturligtvis också ett t-test (tvåsidigt), och ger samma resultat:

Two-Sample T-Test and CI: T1; T2

	N	Mean	StDev	SE Mean
T1	6	8,033	0,784	0,32
T2	6	7,283	0,747	0,30

Difference = mu (T1) - mu (T2)
Estimate for difference: 0,750
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = 1,70   P-Value = 0,124   DF = 9

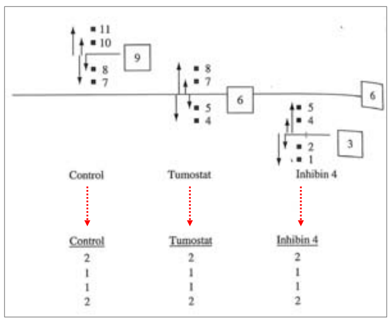
$1{,}7^2 = 2{,}89$ allmänt $F \sim T^2$ för 2 grupper, Wackerly p. 634

One-way ANOVA: Antaganden

- Oberoende observationer i de olika grupperna.
- Normalfördelade populationer. ANOVA fungerar oftast bra utan att detta är väl uppfyllt.
- Homogena varianser. Lika spridning i de olika grupperna. Vid samma antal observationer i varje grupp är ANOVA ganska okänsligt för brott mot detta.
  - Levene test, Bartlett's test

Har flera grupper samma varians?

Levene-test

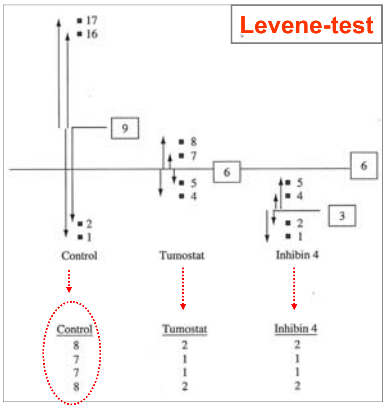


Beräkna absoluta differenserna till gruppmedelvärdet

One-way ANOVA på differenserna
H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3= \ldots =\mu_k$

Låg F-värde i One-way ANOVA → H_0 förkastas inte → ingen signifikant skillnad mellan absoluta differenserna → samma varianser

Har flera grupper samma varians?



Beräkna absoluta differenserna till gruppmedelvärdet

One-way ANOVA på differenserna:
H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\ldots=\mu_k$

Hög F-värde i One-way ANOVA → H_0 förkastas → signifikant skillnad mellan absoluta differenserna → INTE samma varianser (heterocedastic)

Räkneexempel 4 grupper

A	B	C	D
65	75	59	94
87	69	78	89
73	83	67	80
79	81	62	88
81	72	83	
69	79	76	
	90		

$n_1=6 \quad n_2=7 \quad n_3=6 \quad n_4=4$

$\overline{Y}_1=75.67 \quad \overline{Y}_2=78.43 \quad \overline{Y}_3=70.83 \quad \overline{Y}_4=87.75$

$$\overline{Y}=\frac{n_1\cdot\overline{Y}_1+n_2\cdot\overline{Y}_2+n_3\cdot\overline{Y}_3+n_4\cdot\overline{Y}_4}{n_1+n_2+n_3+n_4}=\frac{1179}{23}=77.35$$

$$SST=\sum_{i=1}^{k}n_i\left(\overline{Y}_i-\overline{Y}\right)^2=712.6 \qquad SSE=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_i\right)^2=1196.6$$

$$MST=\frac{SST}{df}=\frac{SST}{k-1}=237.5 \qquad MSE=\frac{SSE}{df}=\frac{SSE}{n-k}=63.0$$

α=0.05

$$F=\frac{MST}{MSE}=\frac{237.5}{63.0}=3.77$$

$$\Omega_{krit}=\left\{F>F_\alpha(k-1,n-k)\right\}=\left\{F>F_{0.05}(3,19)\right\}=\left\{F>3.13\right\}$$

Räkneexempel 4 grupper, alternativ

A	B	C	D
65	75	59	94
87	69	78	89
73	83	67	80
79	81	62	88
81	72	83	
69	79	76	
	90		

	A	B	C	D
n	6	7	6	4
x	75,67	78,43	70,83	87,75
s²	66,67	50,62	91,77	33,58

$$\overline{Y}=\frac{n_1\cdot\overline{Y}_1+n_2\cdot\overline{Y}_2+n_3\cdot\overline{Y}_3+n_4\cdot\overline{Y}_4}{n_1+n_2+n_3+n_4}=\frac{1179}{23}=77.35$$

$$\begin{aligned}SST&=\sum_{i=1}^{k}n_i\left(\overline{Y}_i-\overline{Y}\right)^2\\&=6\cdot(75.67-77.35)^2+7\cdot(78.43-77.35)^2\\&\quad+6\cdot(70.83-77.35)^2+4\cdot(87.75-77.35)^2\\&=16.93+8.165+255.1+432.64\\&=712.8\end{aligned}$$

$$MST=\frac{SST}{k-1}=\frac{712.8}{3}=237.6$$

$$\begin{aligned}SSE&=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\cdot S_i^2 \qquad \boxed{(alternativ\ formel)}\\&=5\cdot 66.67+6\cdot 50.62+5\cdot 91{,}77+3\cdot 33{,}58\\&=333.35+303.72+458.85+100.74\\&\ 1196.66\end{aligned}$$

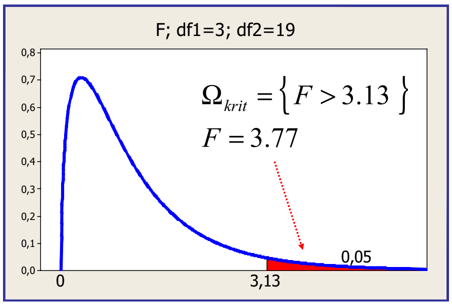
$$MSE=\frac{SSE}{n-k}=\frac{1196.66}{19}=63$$

$$F=\frac{MST}{MSE}=\frac{237.6}{63.0}=3.77$$

α=0.05

$$\Omega_{krit}=\left\{F>F_\alpha(k-1,n-k)\right\}=\left\{F>F_{0.05}(3,19)\right\}=\boxed{\left\{F>3.13\right\}}$$

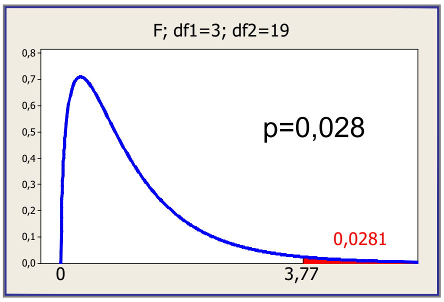
Räkneexempel 4 grupper, forts.



Testvariabeln F överskrider det kritiska värdet (3 numerator och 19 denominator frihetsgrader). Nollhypotesen förkastas därför.
Minst ett medelvärde avviker från de andra (α=0.05).

P-värdet

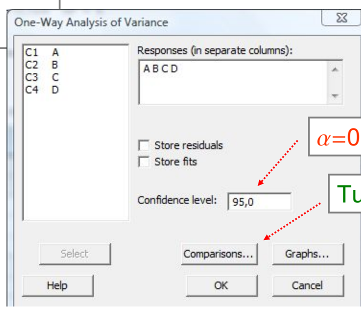
Define Shaded Area by X-value: 3,77



ANOVA_1.MPJ

Räkneexempel 4 grupper, Minitab

Stat / ANOVA / One-Way (Unstacked)



α=0.05

Tukeys test

```
One-way ANOVA: A; B; C; D

Source   DF      SS      MS      F       P
Factor    3   712,6   237,5   3,77   0,028
Error    19  1196,6    63,0
Total    22  1909,2

S = 7,936   R-Sq = 37,32%   R-Sq(adj) = 27,43%

                         Individual 95% CIs For Mean Based on
                         Pooled StDev
Level  N   Mean  StDev  ------+---------+---------+---------+---
A      6  75,667  8,165     (------*-----)
B      7  78,429  7,115        (-----*------)
C      6  70,833  9,579  (------*------)
D      4  87,750  5,795               (--------*-------)
                         ------+---------+---------+---------+---
                              70        80        90       100

Pooled StDev = 7,936
```

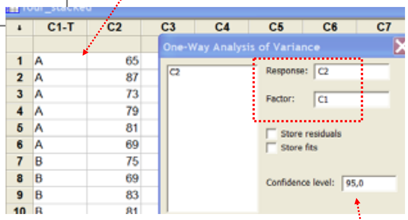
Nollhypotesen förkastas, faktorn har effekt.

ANOVA_1.MPJ

Räkneexempel 4 grupper, stacked data

Stat / ANOVA / One-Way

stacked data

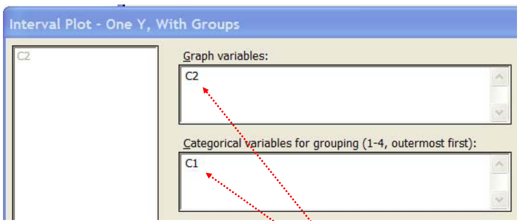


Der blir naturligtvis samma ANOVA-tabell.

α=0.05

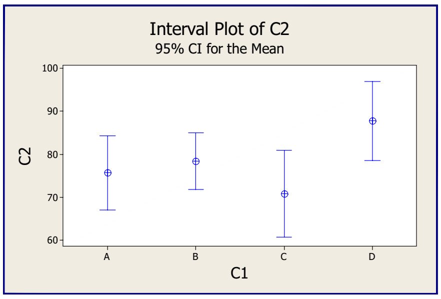
"Interval plot" kan förtydliga ...

Stat / ANOVA / Interval Plot → With groups



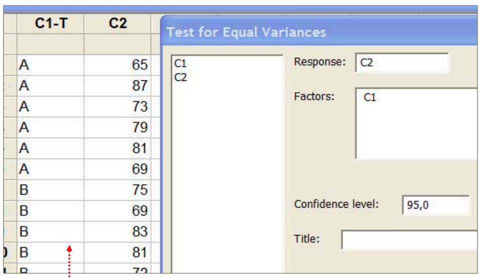
för "stacked data"

Interval plot



Räkneexempel 4 grupper, Levene test

Stat / ANOVA / Test for Equal Variances



stacked data

Levene test, Minitab

Test for Equal Variances: C2 versus C1

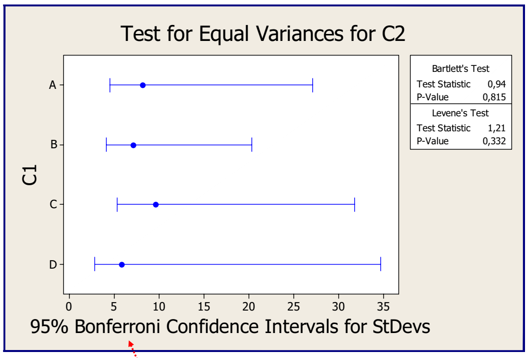
95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

C1	N	Lower	StDev	Upper
A	6	4,53366	8,16497	27,1325
B	7	4,10849	7,11471	20,3548
C	6	5,31908	9,57949	31,8330
D	4	2,85519	5,79511	34,7526

Bartlett's Test (Normal Distribution)
Test statistic = 0,94; p-value = 0,815

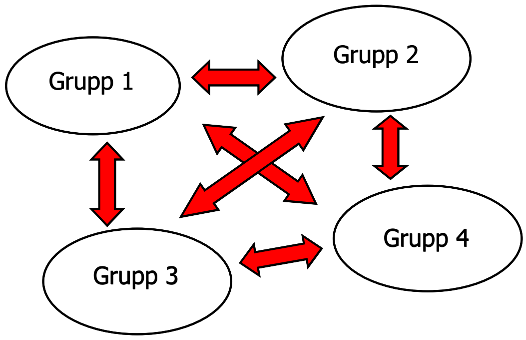
Levene's Test (Any Continuous Distribution)
Test statistic = 1,21; *p-value = 0,332*

Levene test, Minitab



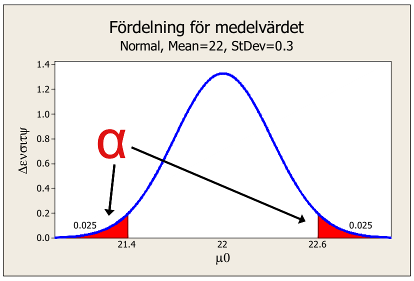
Korrektur för "multiple testing"

Varför inte t-testa parvis ?



$$Antal\ test = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$ → "multiple testing problem"

Varför inte t-testa parvis ?



McKillup s. 105

Fel typ 1: Att förkasta H_0 när den är sann

Varje t-test innebär en risk för fel typ 1 (= α)
Många test → risken blir stor: Bernoulliförsök, Binomialfördelning: $P(X_\alpha \geq 1)$

Vilket medelvärde avviker?

- Vill vi veta det måste vi köra ett *a posteriori* test
- (*naturligtvis bara om H_0 i ANOVA förkastades)*
- t. ex Tukey's test
- Tukey's test *gör* parvisa jämförelser, men på ett speciellt sätt: korrektur för "multiple comparisons"
- kumulativ signifikansnivå (för alla test) $\leq \alpha$

John Tukey, 1915-2000

http://statwiki.wiwi.hu-berlin.de/index.php/Tukey-Test

Tukey's test

Ett par (x, y) jämförs på följande sätt: (H_0: $\mu_x = \mu_y$)

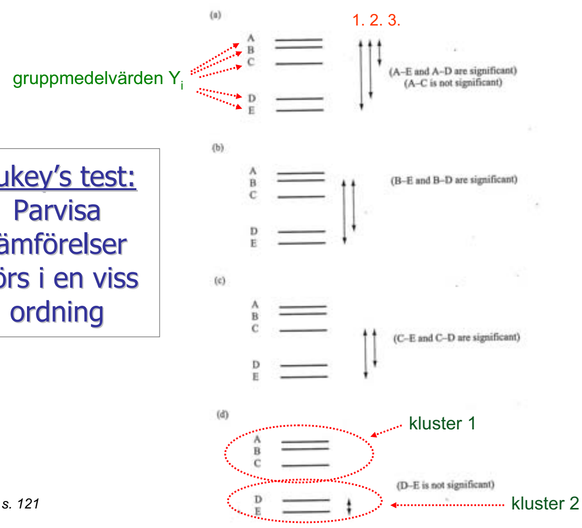
testvariabel: $$q = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{MSE}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} \in q_{k,n}$$ *Tukey – Kramer – Test*

original Tukey-test: $n_x = n_y$

$$MSE = \frac{SSE}{n-k} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{n-k}$$ *från ANOVA*

kristiska värdet beror av α, n och k: $$\Omega_{krit} = \{q > q_{n,k,\alpha}\}$$ *tabell*

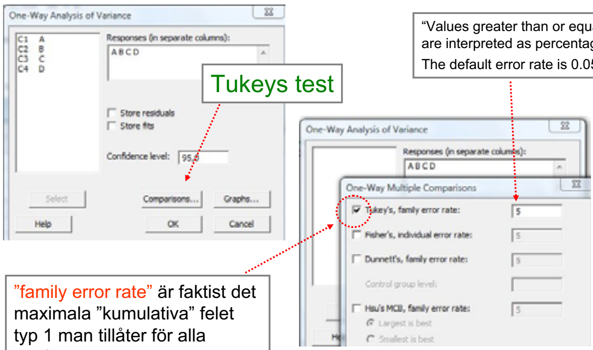
H_0 förkastas om q överskrider de kritiska värdet → x och y har inte samma medelvärde, tillhör inte samma kluster, se nästa sida:



Tukey's test: Parvisa jämförelser görs i en viss ordning

McKillup s. 121

Tukey's test i Minitab



Tukeys test

"Values greater than or equal to 1.0 are interpreted as percentages. The default error rate is 0.05"

"family error rate" är faktist det maximala "kumulativa" felet typ 1 man tillåter för alla jämförelser som görs.

Tukey 95% Simultaneous Confidence Intervals
All Pairwise Comparisons

Konfidensintervall för skillnaden mellan medelvärden

Individual confidence level = 98,89%

A subtracted from:

```
   Lower  Center  Upper   +---------+---------+---------+---------
B  -9,664   2,762 15,188             (-------*------)
C -17,728  -4,833  8,061          (-------*-------)
D  -2,333  12,083 26,500                 (--------*--------)
                          +---------+---------+---------+---------
                          -32      -16        0       16
```

Konfidensintervaller som innehåller 0 betyder: "ingen signifikant skillnad mellan respektive medelvärden".

B subtracted from:

```
   Lower  Center  Upper   +---------+---------+---------+---------
C -20,021  -7,595  4,830          (-------*-------)
D  -4,677   9,321 23,320                (--------*--------)
                          +---------+---------+---------+---------
                          -32      -16        0       16
```

samma som ovan

C subtracted from:

```
   Lower  Center  Upper   +---------+---------+---------+---------
D  2,500  16,917  31,333                  (--------*--------)
                          +---------+---------+---------+---------
                          -32      -16        0       16
```

87.75-70.83=16.92

grupp C skiljer sig från grupp D
(OBS: inte samma sak som "interval plot" ovan.

Sammanfattning

Levene test: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \ldots = \sigma_k^2$?
Om man misstänker att den här förutsättningen för One-Way ANOVA är inte (ungefär) uppfyllt.

One-Way ANOVA på absoluta differenserna till gruppmedelvärdet

⇩

One-Way ANOVA: $\mu_1=\mu_2=\mu_3= \ldots = \mu_k$?
Har grupperna (som uppstår genom olika "treatments") samma medelvärde? Eller: har dessa "treatments" en (signifikant) effekt?
Nollhypotesen är att alla grupper har samma medelvärde, den alternativa hypotesen är att *minst* ett medelvärde avviker.

⇩

Parvisa jämförelser, men på ett speciellt sätt, för att undvika anhopning av fel typ 1.

Tukey-Test: *Vilka* medelvärden är det som avviker, efter en signifikant One-Way ANOVA