

Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen am Beispiel von Schwingungen

Uwe Menzel, IMB Jena
 vorgetragen in Recklinghausen

Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$x = x(t) \quad \text{Auslenkung einer Feder, Ladung ...}$$

$$x' = \frac{dx}{dt} \quad \text{Ableitungen nach der Zeit}$$

$$F(x'', x', x, t) = 0 \quad \text{implizite Form}$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$x'' + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = f(t)$$

- $a_i(t)$: Koeffizienten
- $f(t)$: Störfunktion
- $f(t) = 0$: homogene Gleichung

Uwe Menzel, Jena

Lösbare Fälle

$$x'' + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = f(t)$$

Eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung kann nicht angegeben werden. Jedoch sind Lösungen für eine Reihe von Spezialfällen bekannt:

- homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten
- inhomogene Gl. mit konstanten Koeffizienten und speziellen Störfunktionen
- bei fehlenden Termen, z.B:

- $x'' = \phi(t)$
- $x'' = \phi(x)$
- $x'' = \phi(x')$

Spezielle lösbare Differentialgleichungen

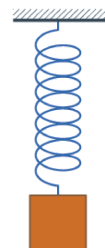
Eulersche, Besselsche und Gaussche Dgl.:

$$at^2x'' + btx' + cx = 0$$

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0$$

$$t(t-1)x'' + [(\alpha + \beta + 1)t - \gamma]x' + \alpha\beta x = 0$$

Federschwinger



Auslenkung aus der Ruhelage: $x(t)$

Quelle: Wikipedia

Ungedämpfter harmonischer Oszillator

Rückstellkraft $F = -k \cdot x$
 Newtonsches Gesetz $F = m \cdot a$

$$m x'' + k x = 0$$

Ansatz: $x = e^{\lambda t}$ λ noch unbekannt

$$m \lambda^2 e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \text{charakteristische Gleichung}$$

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0$$

Zwei linear unabhängige Lösungen: $e^{i\omega_0 t}$ und $e^{-i\omega_0 t}$

Superpositionsprinzip

Zwei linear unabhängige Lösungen: $e^{i\omega_0 t}$ und $e^{-i\omega_0 t}$

Alle Linearkombinationen dieser Lösungen bilden die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{i\omega_0 t} + C_2 \cdot e^{-i\omega_0 t}$$

Fundamentalsystem

$$x(t) = C_1 \cdot e^{i\omega_0 t} + C_2 \cdot e^{-i\omega_0 t}$$

$$e^{i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + i \cdot \sin \omega_0 t \quad \text{Eulersche Gleichung}$$

$$x(t) = A_1 \cdot \sin \omega_0 t + A_2 \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\sin(\omega_0 t + \phi) = \sin \omega_0 t \cdot \cos \phi + \cos \omega_0 t \cdot \sin \phi$$

$$x(t) = B \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$$

Uwe Menzel, Jena

Lineare Unabhängigkeit von 2 Funktionen $x_i(t)$:

Es lassen sich keine Konstanten C_1 und C_2 finden, so dass:

$$C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t) \equiv 0$$

Zwei Funktionen sind linear unabhängig, wenn sie nicht proportional sind:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) = \frac{x_2' \cdot x_1 - x_2 \cdot x_1'}{x_1^2} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Uwe Menzel, Jena

Wronski-Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

SATZ: Zwei Partikularlösungen x_1 und x_2 bilden genau dann ein Fundamentalsystem und ihre Linearkombination stellt das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$x'' + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = 0$$

dar, wenn die aus ihnen gebildete Wronskische Determinante von Null verschieden ist.

Auf höhere Ordnungen erweiterbar:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} \neq 0$$

Anfangsbedingungen

Eine Differentialgleichung 2. Ordnung erfordert die Kenntnis von zwei Anfangswerten (oder Randwerten):

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

$$x(t) = A_1 \cdot \sin \omega_0 t + A_2 \cdot \cos \omega_0 t$$

$$x'(t) = A_1 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t - A_2 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t$$

$$x_0 = A_2$$

$$v_0 = A_1 \cdot \omega_0$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t)$$

Phasenraumdarstellung

t eliminieren und v über x aufragen:

$$x(t) = B \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v(t) = x'(t) = B\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

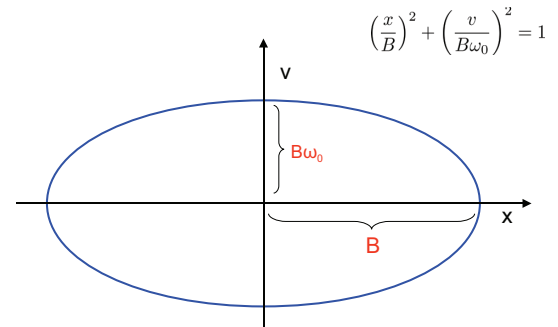
$$\left(\frac{x}{B}\right)^2 = \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$\left(\frac{v}{B\omega_0}\right)^2 = \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$\left(\frac{x}{B}\right)^2 + \left(\frac{v}{B\omega_0}\right)^2 = 1$$

Uwe Menzel, Jena

Phasenraumdarstellung für freie Schwingung



Dämpfung

$$m\ddot{x} + 2r\dot{x} + kx = 0$$

Reibungsterm ~ Geschwindigkeit; Reibungskoeffizient 2r

konstante Koeffizienten → Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

Charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2r\lambda + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda_{1/2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$$

Uwe Menzel, Jena

Gedämpfte Schwingung

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1/2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$$

a) $r > \omega_0$ (starke Dämpfung) → $\lambda_{1/2}$ reell und positiv

b) $r = \omega_0$ (aperiodischer Grenzfall)

$$\lambda = -r$$

$$x_1(t) = e^{-rt} \quad \text{und} \quad x_2(t) = te^{-rt}$$

$$x(t) = e^{-rt}(C_1 + C_2 t)$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-rt} & te^{-rt} \\ -re^{-rt} & (1-rt)e^{-rt} \end{vmatrix} = e^{-2rt} \neq 0$$

Gedämpfte Schwingung, Forts.

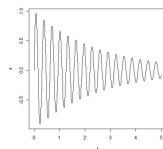
c) $r < \omega_0$ (schwache Dämpfung, Schwingfall)

$$\lambda_{1/2} = -r \pm i\sqrt{\omega_0^2 - r^2}$$

$$x(t) = C_1 \exp\left[-rt + i\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t\right] + C_2 \exp\left[-rt - i\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t\right]$$

$$x(t) = B e^{-rt} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi)$$

Kleinere Frequenz, Amplitude nimmt exponentiell ab:



Uwe Menzel, Jena

Isoklinenmethode

$$x(t) = B \cdot e^{-rt} \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi)$$

$$v(t) = -B \cdot r \cdot e^{-rt} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi) + B \cdot e^{-rt} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi)$$

Man kann t nicht einfach aus der Lösung eliminieren, um die Phasenraumdarstellung zu erhalten.

$$m\ddot{x} + 2r\dot{x} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

$$m \frac{dv}{dx} v + 2mr v + kx = 0$$

Isoklinenmethode, Forts.

$$m \frac{dv}{dx} v + 2mr v + kx = 0$$

Isoklinen sind diejenigen Kurven, auf denen dv/dx jeweils gleiche Werte hat.

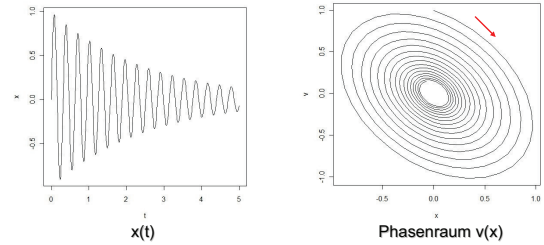
$$\frac{dv}{dx} = - \left(2r + \frac{k}{m} \cdot \frac{x}{v} \right)$$

$$\tan \phi = - \left(2r + \frac{k}{m} \cdot \frac{x}{v} \right)$$

$$v = - \frac{k}{m} \cdot \frac{x}{\tan \phi + 2r}$$

Uwe Menzel, Jena

Gedämpfte Schwingung



Source code: damped_oscillator.R

Uwe Menzel, Jena

Inhomogene Gleichung

$$x'' + 2rx' + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\Omega t)$$

SATZ: Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung und irgendeiner partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

$$x_{inh} = x_{hom} + x_{par}$$

Ansatz für partikuläre Lösung: $x_{par}(t) = D \cdot \sin(\Omega t + \alpha)$

Uwe Menzel, Jena

Inhomogene Gleichung, Forts.

$$x'' + 2rx' + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\Omega t)$$

$$x_{par}(t) = D \cdot \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$Term_1 \cdot \sin(\Omega t) + Term_2 \cdot \cos(\Omega t) = 0$$

$$Term_1 = \omega_0^2 D \cos \alpha - 2r\Omega D \sin \alpha - \Omega^2 D \cos \alpha - f_0 = 0$$

$$Term_2 = \omega_0^2 D \sin \alpha + 2r\Omega D \cos \alpha - \Omega^2 D \sin \alpha = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{2r\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad D = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4r^2\Omega^2}}$$

$$x(t) = Be^{-rt} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi) + D \sin(\Omega t + \alpha)$$

Inhomogene Gleichung, Forts.

$$x(t) = \underbrace{Be^{-rt} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi)}_{\text{Gedämpfte Schwingung:}} + \underbrace{D \sin(\Omega t + \alpha)}_{\text{Forcierte Schwingung:}}$$

Gedämpfte Schwingung:
expon. fallende Ampl.
verminderte Frequenz

Forcierte Schwingung:
 $D \sim F_0$
dieselbe Frequenz wie F_0

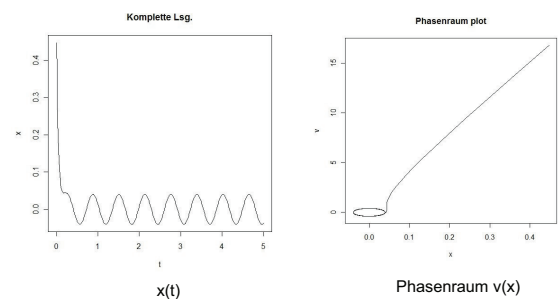
$$v(t) = x'(t) = \dots$$

x und v für einige Hundert t -Werte ausrechnen, dann v über x auftragen, um Phasenraumdarstellung zu bekommen.

Source code: forced_oscillator.R

Uwe Menzel, Jena

Erzwungene Schwingung (Grenzyklus)



Source code: forced_oscillator.R

Uwe Menzel, Jena

Ansätze für spezielle rechte Seiten

Inhomogenität	Ansatz
$a \cos \omega t + b \sin \omega t$	$A \cos \omega t + B \sin \omega t$
$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$	$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots$
$a e^{kt}$	$A e^{kt}$
Linearkombination obiger Funktionen	Linearkombination obiger Ansätze

Resonanzfall

Störfunktion oder einer ihrer Terme ist gleichzeitig Lösung der homogenen Gleichung:

$$x'' + x' - 2x = \cosh t$$

$$x_{hom} = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$$

aber: $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

In diesem Falle versagt das Ansatzverfahren → **Variation der Konstanten**

Uwe Menzel, Jena

Variation der Konstanten

$$x_{hom}(t) = C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t)$$

$$x_s(t) = C_1(t) \cdot x_1(t) + C_2(t) \cdot x_2(t)$$

(Ansatz für partikuläre Lösung)

einsetzen in: $x'' + 2rx' + \omega_0^2 x = f_0(t)$



$$\begin{aligned} C_1' \cdot x_1 + C_2' \cdot x_2 &= 0 \\ C_1' \cdot x_1' + C_2' \cdot x_2' &= f(t) \end{aligned}$$

Beachte, dass x_1 und x_2 Lösungen der homogenen Gleichung sind

Uwe Menzel, Jena

Variation der Konstanten, Forts.

$$C_1' \cdot x_1 + C_2' \cdot x_2 = 0$$

$$C_1' \cdot x_1' + C_2' \cdot x_2' = f(t)$$

Nach C_1' und C_2' auflösen! Dies ist immer möglich, denn

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

(Wronski – Determinante)

Uwe Menzel, Jena

Nichtlineare Dynamik

Duffing-Gleichung

$$x'' + 2rx' + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f_0 \cos(\Omega t)$$

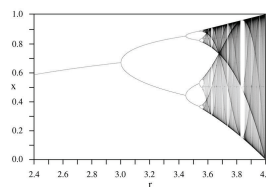
$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \dots$$

$$F(-x) = -F(x)$$

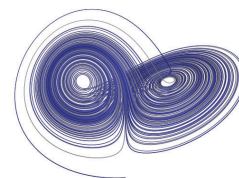
$$U(-x) = U(x)$$

Numerische Lösung (Runge Kutta)

Nichtlineare Dynamik



Bifurkation



Lorenz-Attraktor

Randwertprobleme (RWP)

- an mehreren Stellen werden Bedingungen an x oder x' gestellt
- oft sind dies die Ränder des Definitionsbereiches
- bei RWP existiert nicht immer eine eindeutige Lösung

$$x'' + x = 0$$

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

$$x(0) = 0 \text{ und } x(1) = 0$$

Uwe Menzel, Jena

$$x'' + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

- a) $x(0) = 0$ und $x(1) = 0$
 $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$ und $C_1 \cdot \cos 1 + C_2 \cdot \sin 1 = 0$
 $C_1 = C_2 = 0$ **eindeutige Lösung**
- b) $x(0) = 0$ und $x(\pi) = 0$
 $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$ und $C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0 = 0$
 $C_1 = 0$; C_2 beliebig **unendlich viele Lösungen**
- c) $x(0) = 0$ und $x(\pi) = 1$
 $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$ und $C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0 = 1$
keine Lösung

Eigenwertgleichungen

$$\frac{m}{2} x'^2 + U(x) = E \quad \text{Energiesatz}$$

$$p = m \cdot x' \quad \text{Impuls}$$

$$\frac{p^2}{2m} + U(x) = E$$

$$p \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx} \quad \text{Impulsoperator}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right) \Psi(x) = E \cdot \Psi(x)$$

sei wieder $U(x) = -\frac{k}{2} x^2$ harmonischer Oszillator

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \frac{k}{2} x^2 \Psi = E \Psi$$

Eigenwertgleichungen, Forts.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \frac{k}{2} x^2 \Psi = E \Psi$$

führt auf Hermiteische Differentialgleichung, nur für bestimmte Werte von E lösbar (Eigenwerte):

$$E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

diskrete Eigenwerte (Energiezustände), Quantelung

Uwe Menzel, Jena

Nichtlineare Differentialgleichung

$$mx'' = -kx \quad \text{lineare Rückstellkraft}$$

$$mx'' = F(x) \quad \text{nichtlineare Rückstellkraft, } F \text{ ist eine nichtlineare Funktion der abhängigen Variablen}$$

$$mx'' x' = F(x) \cdot x' \quad (\text{mit } x' \text{ multiplizieren})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} x'^2 \right) = -\frac{d}{dt} U(x)$$

denn $-\frac{d}{dt} U(x) = -\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = F(x) \cdot x'$

$$\frac{m}{2} x'^2 = E - U(x) \quad \text{Energiesatz}$$

Uwe Menzel, Jena

Nichtlineare Differentialgleichung, Forts.

$$\frac{m}{2} x'^2 = E - U(x) \quad \text{Energiesatz}$$

Trennung der Variablen:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$$

Zusammenfassung

- Lösung einer homogenen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- Ansatzverfahren für inhomogene Gleichungen 2. Ordnung
- Methode der Variation der Konstanten
- Wronski-Determinante, lineare Unabhängigkeit
- Phasenraumportraits, Isoklinenmethode
- Begriffe aus der nichtlinearen Dynamik
- Randwertprobleme
- Eigenwertprobleme

