Sannolikhet och statistik

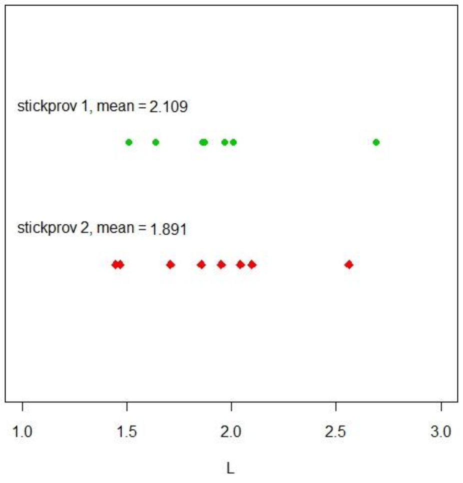
Intervallskattning

HT 2008

Uwe.Menzel@math.uu.se

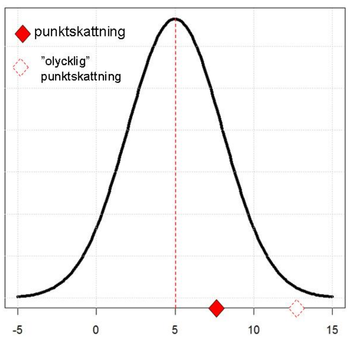
http://www.math.uu.se/∼uwe/

Punktskattning räcker ofta inte



Figur: Mätresultat med stor varians

Stickprovsvariabeln har en fördelning / sprindning



Hur stor är osäkerheten i var skattning?

$I_{\mu_1-\mu_2} = 0.22 \pm 0.01$??

$I_{\mu_1-\mu_2} = -0.19 \pm 0.03$??

$I_{\mu_1-\mu_2} = 0.20 \pm 0.45$??

Figur: Punktskattningen styrs av slumpen

Repetition från kapitel 6

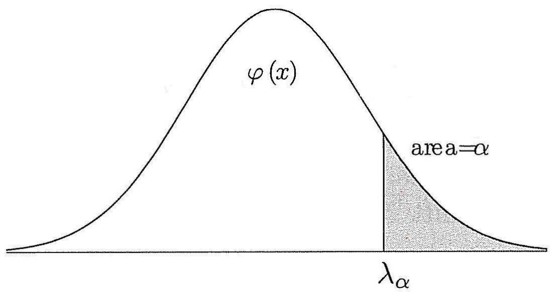
Kvantiler för $N(0,1)$

Standardiserade slumpvariabel för normalfördelning

Sannolikhetsmassan inom kvantilgränser

Fördelning för medelvärdet och differensen av medelvärden

Kvantiler för den standardiserade normalfördelningen



Figur: Kvantiler för $N(0,1)$: $\Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$

α	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
λ_α	3.29	3.09	2.58	2.33	1.96	1.64	1.28

Allmän och standardiserad normalfördelning

För godtyckliga a, b med $a < b$ gäller:

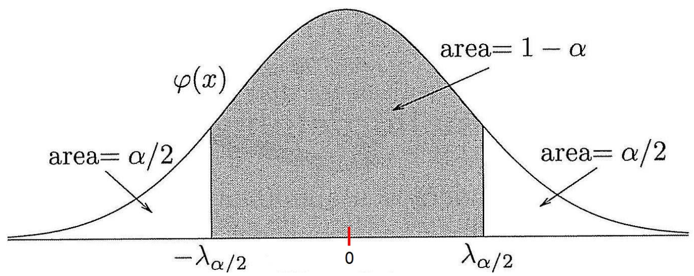
$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Sätt $a = \mu - \lambda_{\alpha/2} \cdot \sigma$ och $b = \mu + \lambda_{\alpha/2} \cdot \sigma$:

$$X \in N(\mu, \sigma): \quad P\left(\mu - \lambda_{\alpha/2}\sigma < X \leq \mu + \lambda_{\alpha/2}\sigma\right) = 1 - \alpha$$

$$Y \in N(0,1): \quad P\left(-\lambda_{\alpha/2} < Y \leq \lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Sannolikhet inom kvantilgränser



Figur: Sannolikhetsmassan i intervallet $(-\lambda_{\alpha/2}, +\lambda_{\alpha/2})$ för $N(0,1)$

Sannolikhet inom kvantilgränser

$$Y \in N(0,1): \quad P\left(-\lambda_{\alpha/2} < Y \leq \lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\begin{aligned} P(-1.96 < Y \leq 1.96) &= 0.95 \quad (\alpha = 0.05) \\ P(-2.58 < Y \leq 2.58) &= 0.99 \quad (\alpha = 0.001) \\ P(-3.29 < Y \leq 3.29) &= 0.999 \quad (\alpha = 0.0001) \end{aligned}$$

α	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
λ_α	3.29	3.09	2.58	2.33	1.96	1.64	1.28

Intervallskattning / Konfidensintervall

Skattning utan konfidensintervall:

- Bensinförbrukningen av en bil är 0.65 l/mil.
- Nackdel: stämmer inte!

Skattning med konfidensintervall:

- Bensinförbrukningen av en bil är 0.65 ± 0.05 l/mil.
- Ännu bättre: Sannolikheten är 95% att en bil av denna typ förbrukar 0.65 ± 0.05 l/mil.
- Fördelar: 1) innehåller info om spridningen 2) är ärlig

Konfidensintervall

Storheten som ska skattas stängs in mellan undre och övre konfidensgräns, t.ex. $\theta = (\bar{x} - 0.05, \bar{x} + 0.05)$.

Intervallgränserna kan bara *konstrueras* ur stickprovet - de är slumpvariabler. Med varje nytt stickprov får man ett annat konfidensintervall (KI).

Det är dock möjligt att ange med vilken sannolikhet gränserna omfattar det sanna värdet, t.ex. P=0.95 (95% KI)

95% KI betyder: om vi tar 100 stickprov och beräknar konfidensintervallet 100 gånger, så omfattar 95 av dessa intervaller det sanna värdet.

Exempel: Normalfördelning, känd σ

En maskin förpackar margarin i askar. Maskinen arbetar förstås inte exakt: nettovikten är fördelad med $X \in N(\mu, 2.5)$.

Genom att ta ett stickprov (n=25) vill vi kolla hur stor medelvärdet av nettovikten är (ska vara 250 gram).

Skattning för μ: $\bar{x} = 1/25 \cdot \sum_{i=1}^{25} x_i = 250.5$

$$\bar{X} \in N\left(\mu, \frac{2.5}{\sqrt{25}}\right) \implies \frac{\bar{X} - \mu}{0.5} \in N(0,1)$$

95% av alla observationer av en $N(0,1)$-variabel hamnar i intervallet $(-1.96, +1.96)$:

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{x} - \mu}{0.5} < +1.96\right) = 95\%$$

Exempel: Normalfördelning, känd σ

95% av alla observationer av en $N(0,1)$-variabel hamnar i intervallet $(-1.96, +1.96)$:

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{x} - \mu}{0.5} < +1.96\right) = 95\%$$

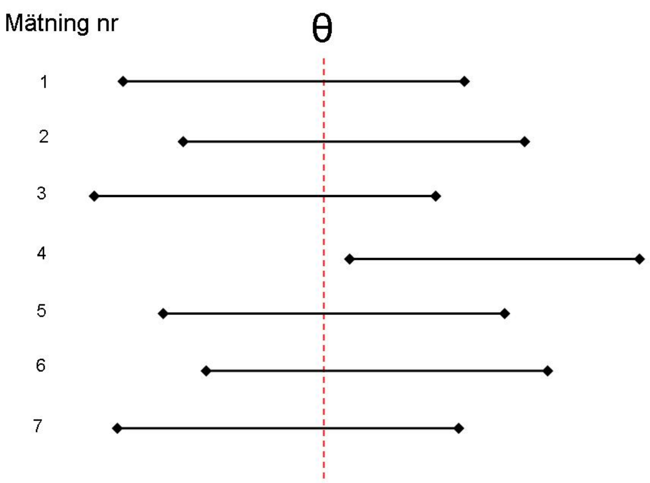
Omformning av uttrycket i parantesen ger:

$$P\left(\bar{x} - 1.96 \cdot 0.5 < \mu < \bar{x} + 1.96 \cdot 0.5\right) = 95\%$$

Sannolikheten är 95% att intervallet $\bar{x} \pm 1.96 \cdot 0.5$ omfattar det sanna värdet μ. Eller: tar jag 100 stickprov (med $n = 25$) och beräknar KI:er, så innehåller 95 av dessa det sanna medelvärdet μ.

Konfidensintervall: $I_\mu \approx (250.5 \pm 1) = (249.5, 251.5)$

95% konfidensintervall för en skattning



Figur: Sannolikheten är 95% att vara konstruerade gränser omfattar det sanna värdet θ, eller: i 95 av 100 stickprov har vi "fångad" det rätta värdet

Skatta väntevärdet för $N(\mu, \sigma)$ med KI där σ är känd

$$\bar{X} \in N(\mu, D) \quad \text{med} \quad D = \sigma/\sqrt{n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\bar{X}-\mu}{D} \in N(0,1)$$

För en observation av referensvariabeln, som är $N(0,1)$, gäller:

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{D} < \lambda_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Omformning av uttrycket inom parantesen ger:

$$P\left(\bar{x} - \lambda_{\alpha/2}D < \mu < \bar{x} + \lambda_{\alpha/2}D\right) = 1-\alpha$$

Det sanna väntevärdet omfattas alltså med slh. $(1-\alpha)$ av:

$$I_\mu = \left(\bar{x} - \lambda_{\alpha/2}D, \quad \bar{x} + \lambda_{\alpha/2}D\right) \qquad D = \sigma/\sqrt{n}$$

Konfidensintervall för μ med konfidensgraden $(1-\alpha)$

Det viktigaste: att hitta en referensvariabel

$$\bar{X} \in N\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1) \quad (\sigma \text{ känd})$$

Uttrycket $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ används som **referensvariabel** (när σ känd).

Referensvariabeln måste vara känd så nära som på den parameter vi vill skatta (μ)

Referensvariabelns fördelning måste vara fullständigt känd (inga parametrar), här $N(0,1)$

Referensvariabeln stängs sedan in inom denna fördelningens kvantiler (se nere)

⋆ Omformning av uttrycket inom parantesen

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{D} \le \lambda_{\alpha/2}\right) && \mid \cdot D \\
&= P\left(-\lambda_{\alpha/2}D < \bar{x}-\mu \le \lambda_{\alpha/2}D\right) && \mid \cdot(-1) \\
&= P\left(\lambda_{\alpha/2}D \ge \mu - \bar{x} > -\lambda_{\alpha/2}D\right) && \mid +\bar{x} \\
&= P\left(\bar{x} + \lambda_{\alpha/2}D \ge \mu > \bar{x} - \lambda_{\alpha/2}D\right) && \mid \text{vänd om} \\
&= P\left(\bar{x} - \lambda_{\alpha/2}D < \mu \le \bar{x} + \lambda_{\alpha/2}D\right)
\end{aligned}$$

Skatta väntevärdet för $N(\mu, \sigma)$ med KI där σ okänd

Om σ är känd gäller $D = \sigma/\sqrt{n}$

Är σ okänd ersätts D med medelfelet: $d = s/\sqrt{n}$

Medelfelet är dock en komplicerad funktion av slumpvariabler:

$$d = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot s = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

Uttrycket $(\bar{X} - \mu)/d$ är därför <u>inte</u> normalfördelad:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{d} \notin N$$

Skatta väntevärdet för $N(\mu, \sigma)$ med KI där σ okänd

Uttrycket $(\bar{X} - \mu)/d$ kan ändå användas som referensvariabel:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{d} \in t(f) \quad \text{med} \quad f = n - 1 \quad \text{(frihetsgrader)}$$

Även för t-fördelningen finns kvantiler tabellerade:

$$P\left(-t_{\alpha/2}(f) < \frac{\bar{X} - \mu}{d} < t_{\alpha/2}(f)\right) = 1 - \alpha$$

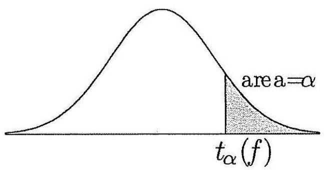
$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(f)\, d < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(f)\, d\right) = 1 - \alpha$$

Det sanna väntevärdet omfattas alltså med slh. $(1 - \alpha)$ av:

$$I_\mu = (\bar{x} - t_{\alpha/2}(f)d, \quad \bar{x} + t_{\alpha/2}(f)d) \qquad d = s/\sqrt{n}\ ; \quad f = n - 1$$

Skatta väntevärdet för $N(\mu, \sigma)$ med KI där σ okänd

Tabell 3. t-**fördelningen**
$P(X > t_\alpha(f))$, där $X \in t(f)$.



f	α 0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07

Sammanfattning för skattning av μ för $N(\mu, \sigma)$

Slumpmässigt stickprov $x_1, \ldots x_n$ från $N(\mu, \sigma)$ där μ är okänt.

Skattningar för μ med konfidensgraden $(1 - \alpha)$ är:

σ	Konfidensintervall	Förkortningar
känd	$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot D$	$D = \sigma/\sqrt{n}$
okänd	$I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot d$	$d = s/\sqrt{n}$

Exempel för skattning av μ för $N(\mu, \sigma)$

Vi vet (eller har skäl att tro) att X är normalfördelad.

$\vec{x} = (15.7, 14.3, 12.65, 13.2, 16.85, 16.05, 16.55, 16.05, 16.6, 17.05)$

Sökes: 95% konfidensintervall för μ

Om det är känt att $\sigma = 1.56$:

$D = \sigma/\sqrt{n} \approx 0.5 \qquad \lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.025} = 1.96$

$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot D = 15.5 \pm 1.96 \cdot 0.5 \approx 15.5 \pm 1 = (14.5, 16.5)$

Om σ är okänd:

$s = 1.56 \quad d = s/\sqrt{n} \approx 0.5 \qquad t_{\alpha/2}(f) = t_{0.025}(9) = 2.26$

$I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot d \approx 15.5 \pm 2.26 \cdot 0.5 \approx 15.5 \pm 1.1 = (14.4, 16.6)$

⋆ Skatta σ för $N(\mu, \sigma)$ med KI där μ är okänd

Referensvariabel: $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \in \chi^2(n-1)$

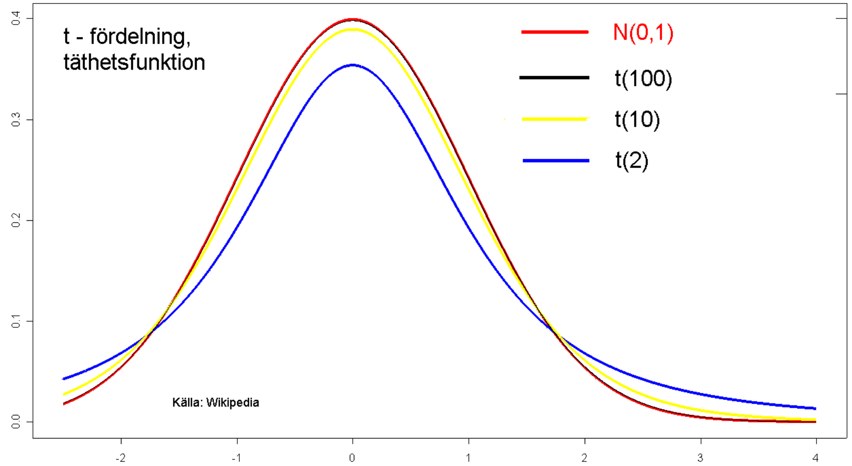
Även för χ^2-fördelningen finns kvantiler tabellerade ($f = n - 1$):

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(f) < \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 < \chi^2_{\alpha/2}(f)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}(f)} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 < \sigma^2 < \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(f)} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right) = 1 - \alpha$$

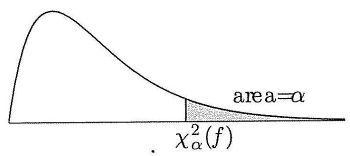
OBS!: χ^2-fördelningen är inte symmetrisk.

Jämförelse av normal- och t-fördelning



⋆ Tabell för χ^2-fördelningen

Tabell 4. χ^2**-fördelningen**
$P(X > \chi^2_\alpha(f))$, där $X \in \chi^2(f)$.



f	α 0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	12.1
2	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	15.2
3	0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	17.7
4	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	20.0
5	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	22.1
6	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	24.1
7	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	26.0
8	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	27.9
9	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	29.7
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	31.4
11	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	33.1
12	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	34.8
13	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	36.5
14	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	38.1
15	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	39.7
16	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	41.3
17	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	42.9

$\star$ Sammanfattning för skattning av σ för $N(\mu, \sigma)$

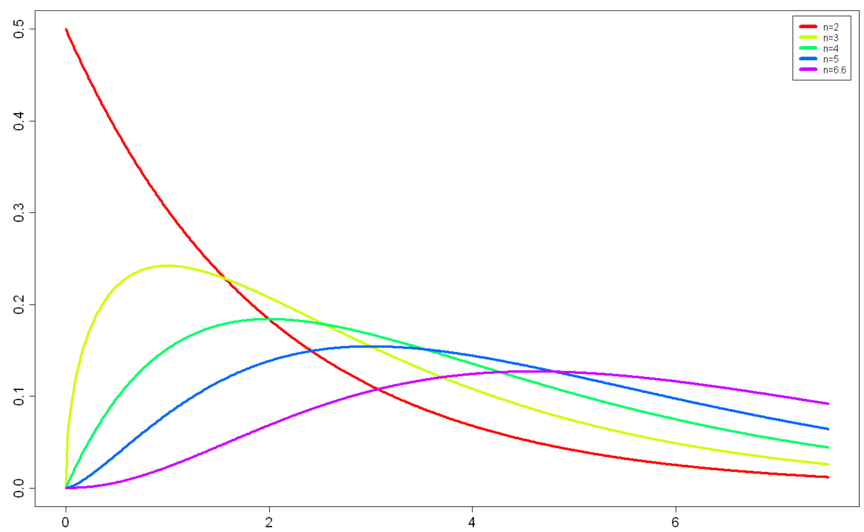
Sickprov $x_1, \dots x_n$ från $N(\mu, \sigma)$ där μ och σ är okända.

Skattningar för σ med konfidensgraden $(1-\alpha)$ är:

Skattn.	Konfidensintervall	Förkortningar
σ^2	$I_{\sigma^2} = \left(Q/\chi^2_{\alpha/2}(f),\ Q/\chi^2_{1-\alpha/2}(f)\right)$	$Q = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
σ	$I_\sigma = \left(\sqrt{\frac{f}{\chi^2_{\alpha/2}(f)}} \cdot s,\ \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{1-\alpha/2}(f)}} \cdot s\right)$	$s = \sqrt{\frac{Q}{n-1}}$

$f = n - 1$

$\star$ χ^2 -fördelning för olika frihetsgrader



$\star$ Exempel för skattning av σ för $N(\mu, \sigma)$

Vi vet att X är normalfördelad, men μ och σ är okända

$\vec{x} = (15.7, 14.3, 12.65, 13.2, 16.85, 16.05, 16.55, 16.05, 16.6, 17.05)$

Sökes: 95% konfidensintervall för σ

$s = 1.56 \quad f = 9$

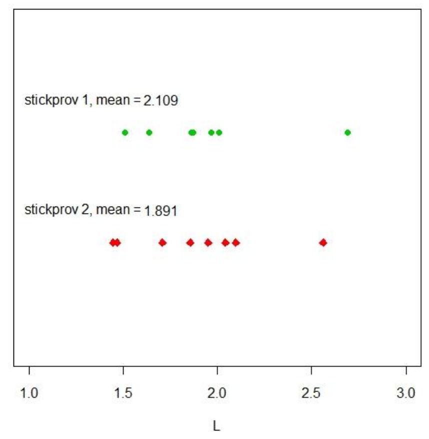
$$\chi^2_{\alpha/2}(f) = \chi^2_{0.025}(9) = 19$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(f) = \chi^2_{0.975}(9) = 2.7$$

$$I_\sigma = \left(\sqrt{\frac{f}{\chi^2_{\alpha/2}(f)}} \cdot s,\ \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{1-\alpha/2}(f)}} \cdot s\right) = \left(\sqrt{\frac{9}{19}} \cdot 1.56,\ \sqrt{\frac{9}{2.7}} \cdot 1.56\right)$$

$$= (1.07,\ 2.85)$$

Konfidensintervall för differens mellan väntevärden av två normalfördelade storheter



Figur: Mätresultat med stor varians

$x_1, x_2, \dots x_{n_x}$ från $N(\mu_X, \sigma_X)$

$y_1, y_2, \dots y_{n_y}$ från $N(\mu_Y, \sigma_Y)$

Konfidensintervall för $\Delta\mu$; σ_x och σ_y kända

Skattning för $(\Delta\mu)$: $(\Delta\mu)^*_{obs} = \bar{x} - \bar{y}$; $(\Delta\mu)^* = \bar{X} - \bar{Y}$

$$\bar{X} - \bar{Y} \in N(\mu_X - \mu_Y, D) \quad \text{med} \quad D = \sqrt{\sigma_X^2/n_X + \sigma_Y^2/n_Y}$$

Referensvariabel: $$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{D} \in N(0,1)$$

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{D} < \lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{x} - \bar{y} - \lambda_{\alpha/2} D < \mu_X - \mu_Y < \bar{x} - \bar{y} + \lambda_{\alpha/2} D\right) = 1 - \alpha$$

Den sanna differensen omfattas alltså med slh. $(1-\alpha)$ av:

$$I_{\mu_X - \mu_Y} = \left(\bar{x} - \bar{y} - \lambda_{\alpha/2} D;\ \bar{x} - \bar{y} + \lambda_{\alpha/2} D\right) \qquad D = \sqrt{\sigma_X^2/n_X + \sigma_Y^2/n_Y}$$

Konfidensintervall för $\Delta\mu$; $\sigma = \sigma_X = \sigma_Y$ okänd

Man kan visa att $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{d}$ är t-fördelad:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{d} \in t(f) \quad \text{med} \quad f = (n_X - 1) + (n_Y - 1)$$

Stäng in referensvariabeln mellan t-fördelningens kvantiler:

$$P\left(-t_{\alpha/2}(f) < \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{d} < t_{\alpha/2}(f)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{x} - \bar{y} - t_{\alpha/2}(f)\, d < \mu_X - \mu_Y < \bar{x} - \bar{y} + t_{\alpha/2}(f)\, d\right) = 1 - \alpha$$

Den sanna differensen omfattas alltså med slh. $(1-\alpha)$ av:

$$I_{\mu_X - \mu_Y} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f)\, d\right) \qquad d = s_{xy}\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}$$

Konfidensintervall för $\Delta\mu$; $\sigma = \sigma_X = \sigma_Y$ okänd

Om σ är känd gäller: $D = \sigma\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}$

Är σ okänd ersätts D med medelfelet: $d = s_{xy}\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}$

Stickprovs-standardavv. för två stickprov som antas ha samma σ:

$$s_{xy} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i - \bar{Y})^2}{(n_X - 1) + (n_Y - 1)}} = \sqrt{\frac{Q_x + Q_y}{(n_X - 1) + (n_Y - 1)}}$$

Uttrycket $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{d}$ är därför inte normalfördelad:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{d} \notin N$$

Sammanfattning: Normalfördelning, KI för $\Delta\mu$

Två normalfördelade stickprov där $\Delta\mu$ är okänt.

Skattningar för $\Delta\mu$ med konfidensgraden $(1-\alpha)$ är:

σ_X, σ_Y	Konfidensintervall	Förkortningar
båda kända	$I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot D$	$D = \sqrt{\sigma_X^2/n_X + \sigma_Y^2/n_Y}$
båda lika, dock okända	$I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f) \cdot d$	$d = s\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}$ $s = \sqrt{(Q_X + Q_Y)/f}$

$Q_X = \sum_{i=1}^{n_X}(X_i - \bar{X})^2$; $f = (n_X - 1) + (n_Y - 1)$

Parade observationer

Exempel: Blodtryck hos 10 personer före och efter användning av en preparat.

Person	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Blodtryck före	75	70	75	65	95	70	65	70	65	90
Blodtryck efter	85	70	80	80	100	90	80	75	90	100

Modell för parade observationer

Exempel: Blodtryck före och efter användning av en preparat.

Par	1	2	3	4
X	$N(\mu_1 + \Delta, \sigma_1)$	$N(\mu_2 + \Delta, \sigma_1)$	$N(\mu_3 + \Delta, \sigma_1)$	...
Y	$N(\mu_1, \sigma_2)$	$N(\mu_2, \sigma_2)$	$N(\mu_3, \sigma_2)$	...
$Z = X - Y$	$N(\Delta, \sigma_z)$	$N(\Delta, \sigma_z)$	$N(\Delta, \sigma_z)$	...

$$Z = X - Y \in N(\Delta, \sigma_z) \quad \text{med} \quad \sigma_z = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Mest intressant är Δ (t.ex skillnad mellan blodtrycken före/efter)

Alla Z kommer från samma normalfördelning och det kan utnyttjas för att skatta Δ!

KI för $\Delta\mu$ där X och Y är parade observationer

$Z = X - Y \in N(\Delta, \sigma_z) \quad \Rightarrow \quad \bar{Z} \in N\left(\Delta, \sigma_z/\sqrt{n}\right)$

Vi har en observation $z_1, z_2, \ldots z_n$ (alla differenser $z_i = x_i - y_i$)

$\Rightarrow$ **Standardsituation**: KI för väntevärdet för N där σ okänd.

Referensvariabel: $\dfrac{\bar{Z} - \Delta}{d} \in t(f)$ med $f = n - 1$ (frihetsgrader)

$$P\left(-t_{\alpha/2}(f) < \frac{\bar{Z} - \Delta}{d} < t_{\alpha/2}(f)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{Z} - t_{\alpha/2}(f)\,d < \Delta < \bar{Z} + t_{\alpha/2}(f)\,d\right) = 1 - \alpha$$

Den sökte parametern Δ omfattas alltså med slh. $(1 - \alpha)$ av:

$$I_\Delta = \left(\bar{z} - t_{\alpha/2}(f)d, \;\; \bar{z} + t_{\alpha/2}(f)d\right) \qquad d = s_z/\sqrt{n}\;; \quad f = n - 1$$

Exempel för KI för $\Delta\mu$ för parade observationer

Två personer utförde mätningar av 11 olika objekt:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	21.6	22.9	20	23.6	15.7	17.5	27.3	19.8	16.4	14.7	20.1
A	20.2	22	19.7	21.4	16.3	17	24.5	15.6	16	13.2	19
z	1.4	0.9	0.3	2.2	-0.6	0.5	2.8	4.2	0.4	1.5	1.1

Mätningarna antas vara observationer från $N(\mu_j, \sigma_1)$ resp. $N(\mu_j + \Delta, \sigma_2)$ där Δ är den systematiska differensen mellan båda.

$\bar{z} = 1.34 \qquad f = n - 1 = 10 \qquad t_{\alpha/2}(f) = t_{0.025}(10) = 2.23$

$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2} = 1.33 \qquad d = s/\sqrt{11} = 0.401$

$$I_\Delta = \left(\bar{z} \pm t_{\alpha/2}(f)d\right) = (1.34 \pm 2.23 \cdot 0.401) = (1.34 \pm 0.89) = (0.45, 2.23)$$

Normalapproximationen för intervallskattning

Problem: Stickprovsvariabel inte normalfördelad

Är stickprovet stor gäller approximationen: $\theta^* \in N$

Exempel: $\bar{X} \in AsN(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ även om komponenterna X_i inte är normalfördelade (Centrala gränsvärdessatsen)

Referensvariabel: $$\frac{\theta^* - \theta}{D(\theta^*)} \in N(0,1)$$

Approximationen är desto bättre ju större stickprovet är.

Normalapproximationen för intervallskattning

Låt θ^* vara en punktskattning för θ, med $E(\theta^*) = \theta$ och standardavvikelsen D.

Låt θ^* vara ungefär normalfördelad (stort stickprov).

Konfidensintervaller för θ med konfidensgraden $\approx (1-\alpha)$ är:

D	Allmän θ^*	$\theta^* = \bar{X}$
D känd	$I_\theta = \theta^*_{obs} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot D$	$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot D$ (med $D = \sigma/\sqrt{n}$)
$D = D(\theta)$	$I_\theta = \theta^*_{obs} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d$	$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d$ (med $d = s/\sqrt{n}$)

$s^2 = 1/(n-1)\sum(x_i - \bar{x})^2$

Normalapproximation, KI för $\Delta\mu$

Två stora stickprov, μ_1, μ_2 resp. σ_1, σ_2.

Skattningar för $\Delta\mu$ med konfidensgraden $\approx (1-\alpha)$ är:

σ_1, σ_2	Konfidensintervall	Förkortningar
båda kända	$I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot D$	$D = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$
båda okända	$I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d$	$d = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

$s^2 = 1/(n-1)\sum(x_i - \bar{x})^2$

Exempel för normalapproximation, KI för $\Delta\mu$

Test av två bedövningsmedel A och B, bedövningstiden (minuter):

$A = (195, 240, 154, 95, 65, 82, 132, 155, 125, 119, 155, 345,$
$145, 200, 130, 223, 145, 207, 183, 190, 137, 210)$

$B = (88, 73, 165, 188, 145, 158, 195, 165, 140, 145, 203, 196,$
$230, 225, 128, 190, 170, 158, 72, 135, 105, 155, 165, 120$
$138, 125, 188, 145, 208, 75$

99% konfidensintervall för skillnaden mellan medelvärden ?

$\bar{x}_A = 165.09 \quad s_A = 60.96 \quad \bar{x}_B = 153.1 \quad s_B = 43.08 \quad \bar{x}_A - \bar{x}_B = 11.99$

$d = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{60.96^2}{22} + \frac{43.08^2}{30}} = 15.19$ (medelfelet)

$1 - \alpha = 0.99 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.01 \qquad \lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.005} = 2.58$

$I_{\Delta\mu} = \bar{x}_A - \bar{x}_B \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d = 11.99 \pm 2.58 \cdot 15.19 = (-27, 51)$

Normalapproximation för binomialfördelningen

Stickprov: $p^*_{obs} = x/n \quad \Longrightarrow \quad p^* = X/n$

$X \in Bin(n, p)$

$X \in AsN(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)})$ (n <u>stor</u>)

$p^* = X/n \in AsN(p, \sqrt{p \cdot (1-p)/n})$

$p^* \in AsN(p, D)$ med $D = \sqrt{p \cdot (1-p)/n}$

$D = \sqrt{p(1-p)/n} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})/n}$

Normalapproximation för binomialfördelningen

$$p^* \in AsN(p, d) \quad med \quad d = \sqrt{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})/n}$$

Stickprovsvariablen p^* är alltså asymptotiskt normalfördelad och vi kan anväda vad vi har hittat förut.

Ett **konfidensintervall** för p med konfidensgraden $(1-\alpha)$ är:

$$I_p = \left(p^*_{obs} - \lambda_{\alpha/2} d,\ p^*_{obs} + \lambda_{\alpha/2} d\right)$$

Exempel för normalapproximationen för Bin(n,p)

Opinionsunders.: $n = 250, \quad x^*_{obs} = 42$

$p^*_{obs} = x/n = 42/250 = 0.168$

$d = \sqrt{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})/n} = \sqrt{0.168 \cdot 0.832/250} = 0.023$

95% konfidensintervall för p: $\quad (\lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.025} = 1.96)$

$$\begin{aligned} I_p &= \left(p^*_{obs} - \lambda_{\alpha/2} d,\ p^*_{obs} + \lambda_{\alpha/2} d\right) \\ &= (0.168 \pm 1.96 \cdot 0.023) = (0.168 \pm 0.046) \\ &= (0.12, 0.21) \end{aligned}$$

Normalapproximationen för Bin(n,p): beräkning av n

Önskemål: 95% KI för p som ska inte vara bredare än 0.1

Hur stor måste n vara (*KI:et blir ju smalare med större stickprov*)

$$\boxed{I_p = \left(p^*_{obs} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d\right) \quad \Longrightarrow \quad w = 2 \cdot \lambda_{\alpha/2} \cdot d \quad (\text{“width”})}$$

$$\begin{aligned} w &= 2 \cdot \lambda_{\alpha/2} \cdot d = 2 \cdot \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n}} \leq 0.1 \\ 0.1\sqrt{n} &\geq 2 \cdot \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})} \\ n &\geq \frac{1}{0.1^2} \cdot 2^2 \cdot \lambda^2_{0.025} \cdot \frac{1}{4} \approx 385 \end{aligned}$$

Med mer information om p kan $p^*_{obs}(1-p^*_{obs}) \leq 1/4$ förbättras.

KI för differens av två väntevärden för Bin

Exempel: Två opinionsundersökn. vid olika tider, n_1, n_2 stora

Undersökning 1	**Undersökning 2**
$p^*_{1,obs} = x_1/n_1$	$p^*_{2,obs} = x_2/n_2$
$X_1 \in Bin\,(n_1, p_1)$	$X_2 \in Bin\,(n_2, p_2)$
$X_1 \in AsN\left(n_1 p_1, \sqrt{p_1(1-p_1)n_1}\right)$	$X_2 \in AsN\left(n_2 p_2, \sqrt{p_2(1-p_2)n_2}\right)$
$p^*_1 \in AsN\left(p_1, \sqrt{p_1(1-p_1)/n_1}\right)$	$p^*_2 \in AsN\left(p_2, \sqrt{p_2(1-p_2)/n_2}\right)$

$p^*_1 \in AsN\left(p_1, \sqrt{p_1(1-p_1)/n_1}\right)$ och $p^*_2 \in AsN\left(p_2, \sqrt{p_2(1-p_2)/n_2}\right)$

Skatta differensen med $p^*_{1,obs} - p^*_{2,obs}$:

$$p^*_1 - p^*_2 \in AsN\,(p_1 - p_2, D) \quad \text{med} \quad D = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)n_2}{n_2}}$$

Referensvariabel: $\dfrac{p^*_1 - p^*_2 - (p_1 - p_2)}{D} \in N(0,1) \qquad D \Rightarrow d$

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{p^*_1 - p^*_2 - (p_1 - p_2)}{d} < +\lambda_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(p^*_{1,obs} - p^*_{2,obs} - \lambda_{\alpha/2}\cdot d < p_1 - p_2 < p^*_{1,obs} - p^*_{2,obs} + \lambda_{\alpha/2}\cdot d\right) = 1-\alpha$$

$$\boxed{I_{p_1-p_2} = p^*_{1,obs} - p^*_{2,obs} \pm \lambda_{\alpha/2}\cdot d} \qquad d = D\left(p^*_{1,obs},\ p^*_{2,obs}\right)$$

Sammanfattning

- Begrepp konfidensintervall
- Referensvariabel
- KI för väntevärdet av $N(\mu, \sigma)$, σ känd eller okänd
- KI för $\Delta\mu$ av två normalfördelade s.v., σ känd eller okänd
- Parade observationer: KI för Δ
- Normalapproximation för intervallskattning
- ... för binomialfördelning

Appendix

Ensidiga intervaller för normalfördelning

För godtyckliga a, b med $a < b$ gäller:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

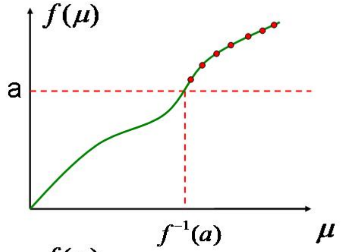
Sätt $a = -\infty$ och $b = \mu + \lambda_\alpha \sigma$ och använd $\Phi(-\infty) = 0$

$$P(X \leq \mu + \lambda_\alpha \sigma) = \Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$$

Sätt $a = \mu - \lambda_\alpha \sigma$ och $b = +\infty$ och använd $\Phi(+\infty) = 1$

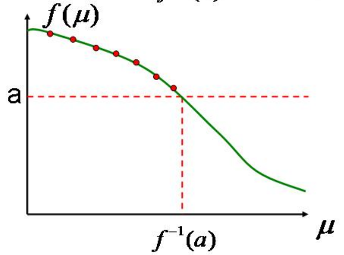
$$P(X > \mu - \lambda_\alpha \sigma) = \Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$$

⋆ Beakta när olikheter omformas!



f monotont växande:

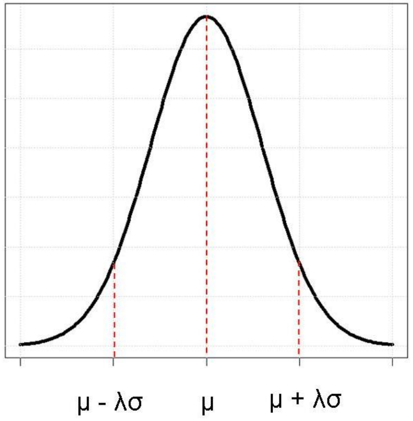
$$f(\mu) > a \rightarrow \mu > f^{-1}(a)$$



f monotont fallande:

$$f(\mu) > a \rightarrow \mu < f^{-1}(a)$$

⋆ Symmetri för ensidiga intervaller



Undre gräns:

$$P(X \leq \mu + \lambda_\alpha \sigma) = 1 - \alpha$$

Övre gräns:

$$P(X \geq \mu - \lambda_\alpha \sigma) = 1 - \alpha$$