

Sannolikhet och statistik  
Flerdimensionella stokastiska variabler

HT 2008

Uwe.Menzel@math.uu.se

<http://www.math.uu.se/~uwe/>

Ett slutforsok kan ge upphov till två (eller fler) reella tal.

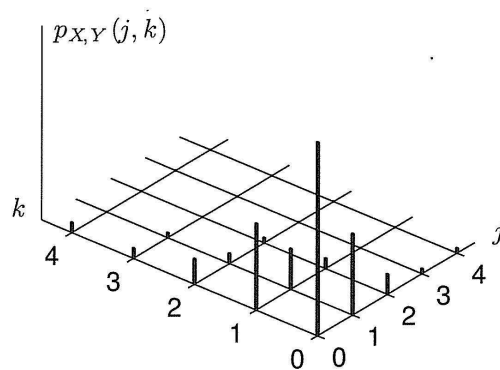
**Två** tal "emitteras" vid varje utfall:  $\Omega \Rightarrow \mathbb{R}^2$

**Exempel**

- ▶ kast med två tärningar
- ▶ slumpmässigt vald person: (vikt, längd)
- ▶ Buffons nålproblem: vinkel och avstånd till planskarv  $\Rightarrow \pi$

Sannolikhetsfunktion för en diskret 2-dim. slumpvariabel

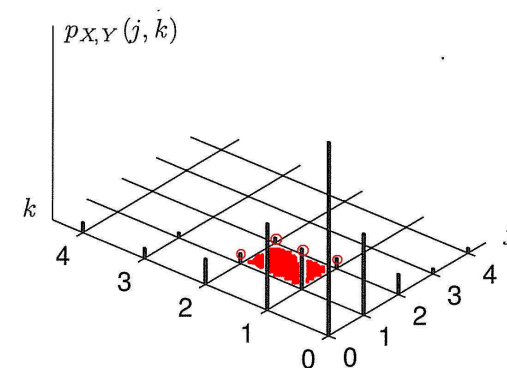
$$p_{X,Y}(j, k) = P(X = j, Y = k)$$



Figur: Barnkullar, Blom s. 86

Diskret 2-dim. slumpvariabel: Sannolikhet för händelser

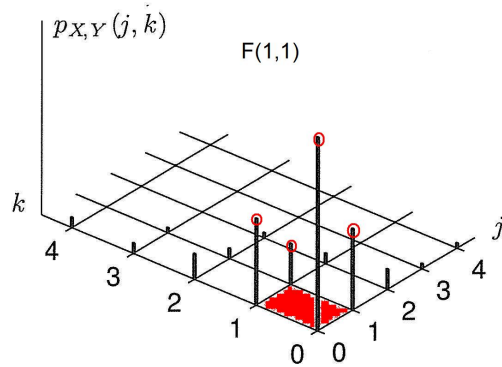
$$P(X, Y \in A) = \sum_{(j,k \in A)} p_{X,Y}(j, k)$$



Figur: Familjer med 1 eller 2 flickor och 1 eller 2 pojkar

## Diskret 2-dim. slumpvariabel: Fördelningsfunktion

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F_{X,Y}(x, y) = \sum_{j \leq x} \sum_{k \leq y} p_{X,Y}(j, k)$$



Figur: Fördelningsfunktion: summa över rektangeln

## Diskret 2-dim. slumpvariabel: Marginalfördelning

$$p_X(j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X,Y}(j, k)$$

$$p_Y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{X,Y}(j, k)$$

$j \setminus k$	0	1	2	3	4	Summa
0	0.38	0.16	0.04	0.01	0.01	0.60
1	0.17	0.08	0.02			0.27
2	0.05	0.02	0.01			0.08
3	0.02	0.01				0.03
4	0.02					0.02
Summa	0.64	0.27	0.07	0.01	0.01	1.00

Figur: Barnkullar, Marginalfördelningar

## Diskret 2-dim. slumpvariabel: Normalisering

Summan av alla  $p_{X,Y}(j, k)$  måste vara ett:

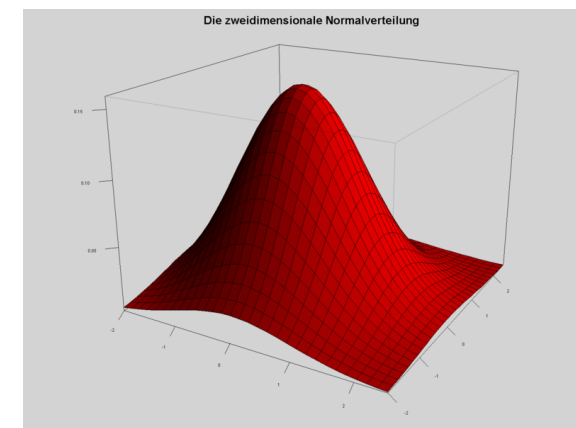
$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{X,Y}(j, k) = 1$$

$j \setminus k$	0	1	2	3	4	Summa
0	0.38	0.16	0.04	0.01	0.01	0.60
1	0.17	0.08	0.02			0.27
2	0.05	0.02	0.01			0.08
3	0.02	0.01				0.03
4	0.02					0.02
Summa	0.64	0.27	0.07	0.01	0.01	1.00

Figur: Barnkullar, Normalisering

## Täthetsfunktion för kontinuerlig 2-dim. slumpvariabel

$$f_{X,Y}(x, y)$$



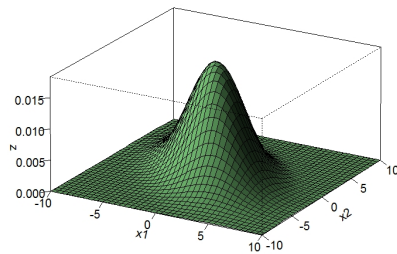
Sannolikhet för händelser:

$$P(X, Y \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Fördelningsfunktion:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) du dv$$

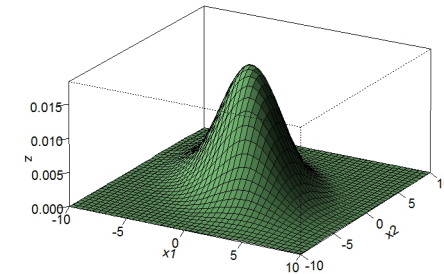
Two dimensional Normal Distribution



Marginalfördelning:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

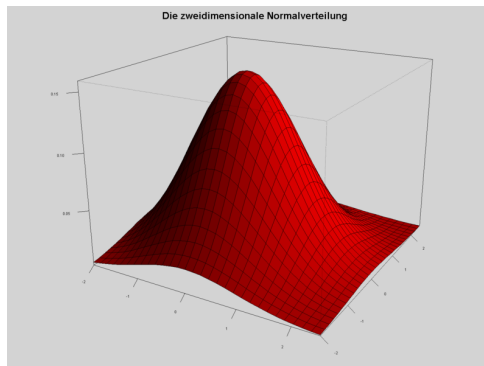
Two dimensional Normal Distribution



Täthetsfunktion: Egenskaper

$$f_{X,Y}(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$



Oberoende stokastiska variabler

Slumpvariablerna X och Y är oberoende om:

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \text{för alla } x \text{ och } y$$

eller

$$p_{X,Y}(j, k) = p_X(j) \cdot p_Y(k) \quad \text{för alla } j \text{ och } k, \text{ diskret s.v.}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \text{för alla } x \text{ och } y, \text{ kontin. s.v.}$$

Kom ihåg:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  för oberoende händelser

## Oberoende stokastiska variabler

Tärningskast:

$$P(X = 1, Y = 6) = P(X = 1) \cdot P(Y = 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Barnkullar:

$j \setminus k$	0	1	2	3	4	Summa
0	0.38	0.16	0.04	0.01	0.01	0.60
1	0.17	0.08	0.02			0.27
2	0.05	0.02	0.01			0.08
3	0.02	0.01				0.03
4	0.02					0.02
Summa	0.64	0.27	0.07	0.01	0.01	1.00

Figur:  $p_{X,Y}(j, k) = p_X(j) \cdot p_Y(k)$  ??