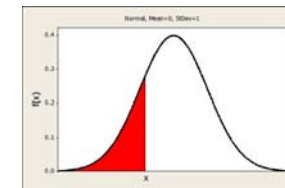


Övningar

Normalfördelning



Sannolikheter för normalfördelningen



- En normalfördelning har medelvärdet $\mu=40$ och standardavvikelsen $\sigma=10$.
 - Hur stor andel av arean finns till vänster om variabelvärdet $x=23$? [eller i symboler: Vad är $P(X \leq 23)$] ?
- Antag fördelningen $N(10,2)$.
 - Hur stor andel av arean finns *till höger* om variabelvärdet $x=11.5$ [alltså $P(X > 11.5)$] ?
- Antag fördelningen $N(20,3)$.
 - Hur stor andel av arean finns mellan variabelvärdena $x=15$ och $x=24$ [alltså $P(15 < X \leq 24)$] ?

Vejde, s. 89

Kaffee



- I ett lager av kaffesäckar vilkas innehåll i kg anses vara $N(35,0.5)$ tar man ut en säck på måfa och portionerar ut innehållet i burkar så att varje burk innehåller 1 kg. Hur stor är sannolikheten att
 1. säcken räcker till minst 36 burkar?
 2. säcken räcker till 34 burkar men inte till 36?

Socker



- Sockerhalten av en viss sort karameller är en normalfördelad slumpvariabel X , med väntevärdet $\mu=40$ och standardavvikelsen $\sigma=2$, dvs. $X \sim N(40,2)$ (allt i %).
 1. Skissa täthetsfunktionen för sockerhalten och markera arean som motsvarar sannolikheten att sockerhalten är större än 42 %.
 2. Man väljer slumpmässigt en karamell. Ange ett numeriskt värde för sannolikheten att karamellens sockerhalt är större än 42 %.
 3. Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald karamell har en sockerhalt mellan 36 och 44 % ?
 4. Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald karamell har en sockerhalt mindre än 36 % eller större än 44 % ? Ange ett numeriskt värde för denna sannolikhet och markera området som motsvarar denna sannolikhet i en ny skiss.
 5. Man väljer slumpmässigt 100 karameller och beräknar det aritmetiska medelvärdet av deras sockerhalt. Medelvärdet beror av slumpvariabler och är därför också en slumpvariabel. Hur är medelvärdet fördelat (ange numeriska värden för väntevärdet och standardavvikelsen)? Hur stor är sannolikheten att detta medelvärde överstiger 40.4 %?

Svar 1



$$X \in N(40, 10)$$

$$P(X \leq 23) = F_x(23) = \Phi\left(\frac{23-40}{10}\right) = \Phi(-1.7) = 1 - \Phi(1.7) = 1 - 0.9554 = 0.0446 \approx 4.5\%$$

$$X \in N(10, 2)$$

$$P(X > 11.5) = 1 - P(X \leq 11.5) = 1 - F_x(11.5) = 1 - \Phi\left(\frac{11.5-10}{2}\right) = 1 - \Phi(0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266 \approx 23\%$$

$$X \in N(20, 3)$$

$$P(15 < X \leq 24) = F_x(24) - F_x(15) = \Phi\left(\frac{24-20}{3}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{3}\right) = \Phi(1.33) - \Phi(-1.67) = \Phi(1.33) - [1 - \Phi(1.67)] = \Phi(1.33) + \Phi(1.67) - 1 = 0.9082 + 0.9525 - 1 = 0.8607 \approx 86\%$$



Svar 2 - Kaffe

$$X \in N(35, 0.5)$$

$$P(X > 36) = 1 - P(X \leq 36) = 1 - F_x(36)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{36-35}{0.5}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275 \approx 2.3\%$$

$$P(34 < X \leq 36) = F_x(36) - F_x(34)$$

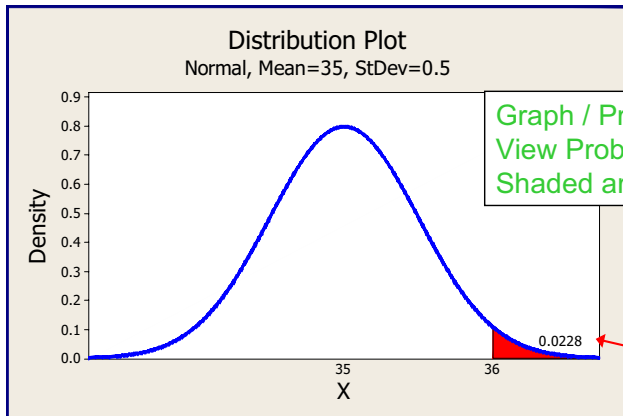
$$= \Phi\left(\frac{36-35}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{34-35}{0.5}\right)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2)]$$

$$= 2 \cdot \Phi(2) - 1 = 0.9545 \approx 95.5\%$$

Svar 2 - Grafik

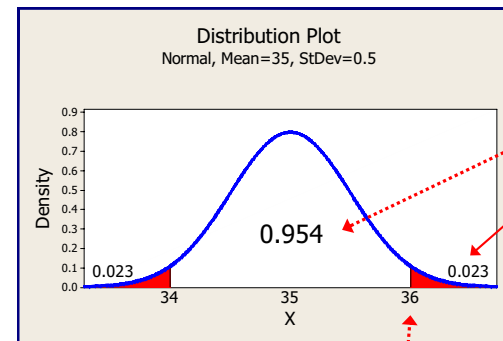
N(35, 0.5)



2.3%

Svar 2 - Grafik

N(35, 0.5)



$\mu + 2 \cdot \sigma$

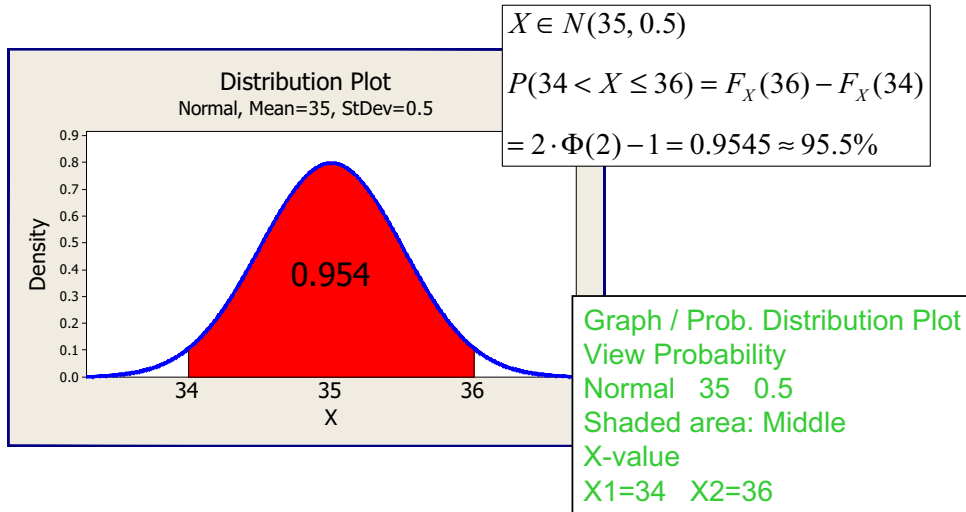
$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954 \text{ allmänt}$$

$$P(X > \mu + 2\sigma) = \frac{1 - 0.954}{2} = 0.023 \text{ se bild}$$



Svar 2 - Grafik

$N(35, 0.5)$



Svar 3 - Socker



$X \in N(40, 2)$

$$P(X > 42) = 1 - P(X \leq 42) = 1 - F_X(42) = 1 - \Phi\left(\frac{42-40}{2}\right)$$

$$= 1 - \Phi(1) = 0.159 \approx 16\%$$

$$P(36 < X \leq 44) = F_X(44) - F_X(36) = \Phi\left(\frac{44-40}{2}\right) - \Phi\left(\frac{36-40}{2}\right)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \cdot \Phi(2) - 1 = 0.954 = P(\mu - 2 \cdot \sigma < X \leq \mu + 2 \cdot \sigma)$$

$$P(44 < X \leq 36) = 1 - P(36 < X \leq 44) = 1 - 0.954 \approx 4.55\% \text{ grafik!}$$

$\bar{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ dvs. $\bar{X} \in N(40, 0.2)$

$$P(\bar{X} > 40.4) = 1 - P(\bar{X} \leq 40.4) = 1 - F_{\bar{X}}(40.4) = 1 - \Phi\left(\frac{40.4-40}{0.2}\right)$$

$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275 \approx 2.27\%$$