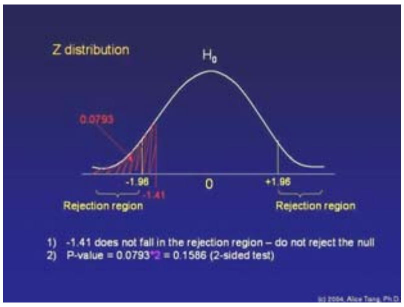
# Z-Testet




uwe.menzel@math.uu.se

# Repetition normalfördelning

1. Medelvärdets fördelning:

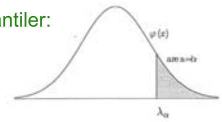
$$X_i \in N(\mu,\sigma) \rightarrow \bar{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

2. Standardiserad normalfördelning:

$$X \in N(\mu,\sigma) \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \in N(0,1)$$

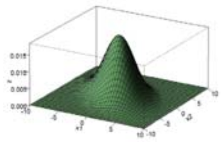
$$\bar{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$$

3. Kvantiler:



Figur: Kvantiler för $N(0,1)$

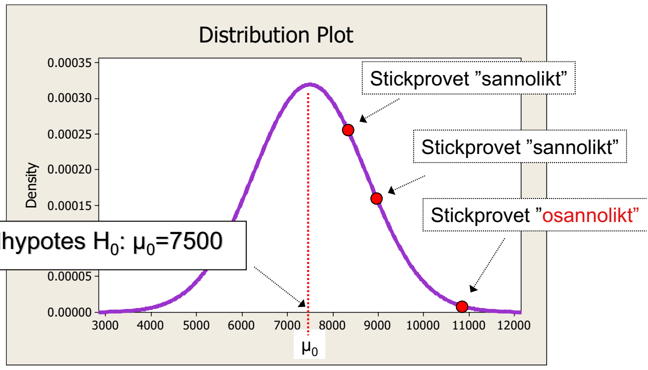
| $\alpha$ | 0.0005 | 0.001 | 0.005 | 0.01 | 0.025 | 0.05 | 0.10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_\alpha$ | 3.29 | 3.09 | 2.58 | 2.33 | 1.96 | 1.64 | 1.28 |



# Vad gör Z-testet ?

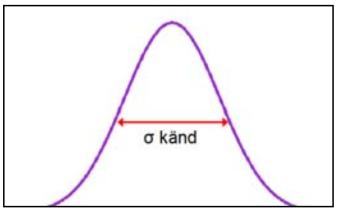
- **$H_0$:** en normalfördelad population har väntevärdet ("medelvärdet") $\mu_0$
- Stickprov → $\bar{x}$
- Hur bra "passar" stickprovets medelvärde till populationens hypotetiska medelvärde $\mu_0$? (hur sannolikt är det att det blir $\bar{x}$ i stickprovet om medelvärdet är verkligen $\mu_0$?)
- Om stickprovet "passar" inte (stor differens mellan $\mu_0$ och $\bar{x}$): populationen har troligtvis ett annat medelvärde än $\mu_0$ → förkasta $H_0$

# Idè




# Användning av Z-testet

- *Begränsat* användningsområde, ty:
  - populationens standardavvikelse[1] ($\sigma$) måste vara känd – men så är det nästan aldrig
- Ändå visar Z-testet hur ett test funkar i allmänhet




[1] σ är den "sanna" standardavvikelsen - blanda inte ihop med s som är en skattning för σ

# Hur räknar man?

stickprovets medelvärde

det hypotetiska medelvärdet för hela populationen

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Testvariabel z

populationens standardavvikelse (måste vara känd)

n: stickprovets storlek

## Hur räknar man?

- $\sigma$=3, den kända standardavvikelsen för den underliggande fördelningen
- $\mu_0$=2, var hypotes för fördelningens medelvärde
- Vi tog ett stickprov med 9 värden som gav medelvärdet 1

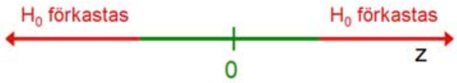
Testvariabel: $$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1-2}{3/\sqrt{9}} = \frac{-1}{1} = -1$$

## Testvariabel: $z = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

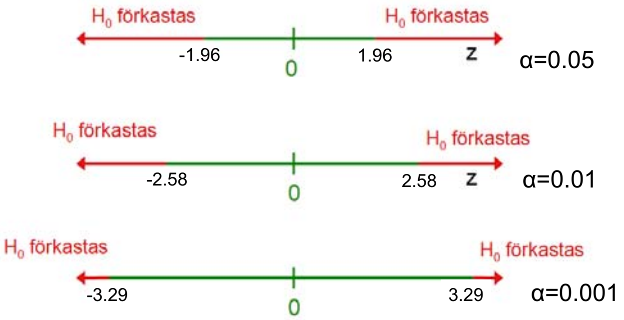
**z = 0:** stickprovets medelvärde stämmer exakt överens med det hypotetiska populationsmedelvärdet $\mu_0$ → inget skäl att tvivla på $H_0$ !!

**z > 0:** stickprovets medelvärde är större än $\mu_0$ - men bara om det är ***signifikant*** större än $\mu_0$ kommer vi att förkasta $H_0$

**z < 0:** stickprovets medelvärde är mindre än $\mu_0$ - men bara om det är ***signifikant*** mindre än $\mu_0$ kommer vi att förkasta $H_0$




## Kritiska områden för olika signifikansnivåer (tvåsidigt test)




## Sammanfattning z-test

1. Hypotes $H_0$: $\mu_0$
2. Välj signifikansnivå: $\alpha$ = 0.05
3. Stickprov → medelvärde
4. Testvariabelns värde
5. Förkasta $H_0$ om z ligger i det kritiska området (”*rejection region*”)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$z \notin (-1.96, 1.96)$$

## Hur kommer man på detta?

## Slutledning

Om $H_0$ är sann, dvs. om medelvärdet är $\mu_0$, då är:

1 $X \in N(\mu_0, \sigma)$

→ det betyder att medelvärdet för flera $X_i$ är fördelat:

2 $\bar{X} \in N\left(\mu_0, \sigma/\sqrt{n}\right)$

→ det betyder att det standardiserade medelvärdet är fördelat:

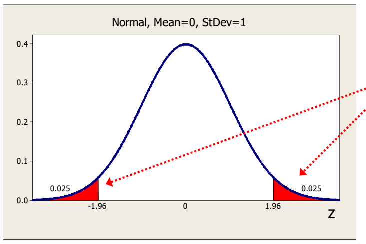
3 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$ *alltså* $z \in N(0,1)$

## Slutledning:

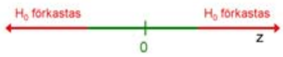
$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

**$H_0$ är sann** $\iff z \in N(0,1)$

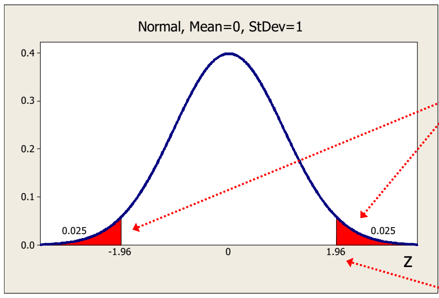
Vi måste alltså undersöka om z är normalfördelad N(0,1):




Det är osannolikt att z är fördelad N(0,1) om värdet för z är för stor eller för liten.
I så fall antar vi att z är **inte** fördelad N(0,1). Det betyder att $H_0$ är **inte** heller sann: vi förkastar $H_0$.




Om z-värdet hamnar i den röda regionen, så förkastar vi nollhypotesen ($H_0$). Sannolikheten att ett sådant värde kommer till stånd ”under $H_0$” är nämligen liten (≤ 5%).

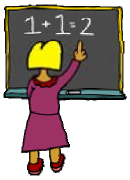



Kritiskt område för α=0.05
(RR: rejection region)
Kritiska värden:
-1.96 och +1.96

kvantil: $\lambda_{\alpha/2}$

$\alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow \lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.025} = 1.96$

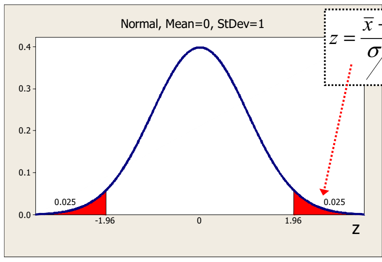
## Exempel 1




- Vikt av barn (kg) som började skolan på 50-talet:
  - normalfördelad
  - μ=22 (väntevärdet, eller ”medelvärdet”)
  - σ=3 (standardavvikelse)
  - anses som korrekta populationsparametrar ty alla barn har mätts
- Vi vill genom ett stickprov testa om väntevärdet μ (”medelvärdet”) har förändrats sedan dess.
- Vi ställer upp en hypotes (om den *nytida* populationen), nämligen att medelvärdet är fortfarande detsamma: $\mu_0=22$
- Vi antar att standardavvikelsen har inte förändrats (**??**) → population med känd standardavvikelse (σ=3)

## Exempel 1, forts.

- Vi tar ett *stickprov av storlek n*
  - vi vägar n barn. t.ex n=100
- Vi beräknar stickprovets medelvärde → 22.8 kg




$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{22.8 - 22}{3 / \sqrt{100}} = \frac{0.8}{0.3} = 2.667$$

$H_0 \rightarrow$

## Sammanfattning z-test

1. Formulering av en hypotes:
   - $H_0$: $\mu_0$=22 (medelvikten har *inte* förändrats)
   - $H_a$: $\mu_0$≠22 (medelvikten har blivit större eller mindre = tvåsidigt test)
2. Välj signifikansnivå: α = 0.05
3. Ta stickprovet och räkna ut dess medelvärde
4. Räkna ut testvariabelns värde
5. Förkasta $H_0$ om z ligger i det kritiska området (”rejection region”)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$z \notin (-1.96, 1.96)$

*eller* $z \notin (-2.58, 2.58)$

*eller* .....

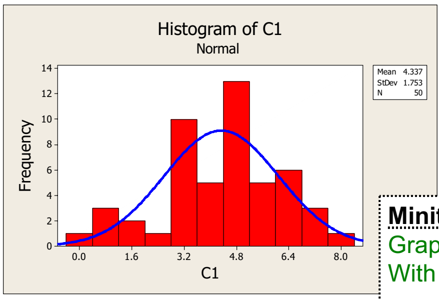
## Förutsättningar för z-testet

- Populationen är normalfördelad
- Populationens standardavvikelse (σ) är känd
- Slumpmässigt stickprov

man får t. ex. inte:
- *bara* välja barn från en sportgymnasieskola
- *bara* välja barn från en storstadsregion
- subjektivt välja ut på något sätt

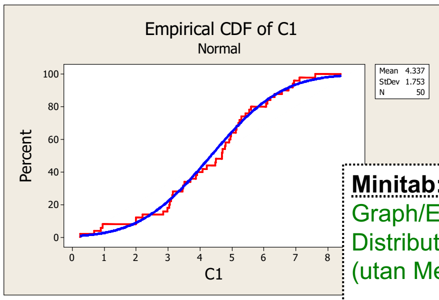
Stickprovet måste vara *representativt*.

## Att testa för normalfördelning



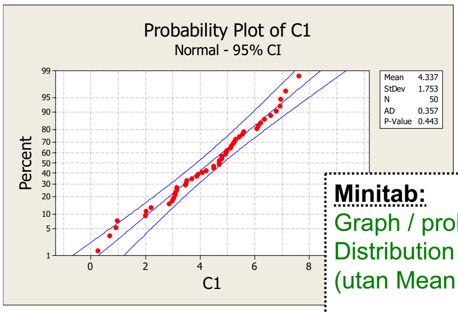

**Minitab:**
Graph/Histogram
With Fit

## Att testa för normalfördelning



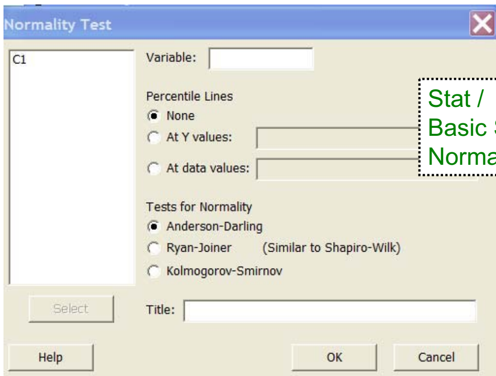

**Minitab:**
Graph/Empirical CDF
Distribution = Normal
(utan Mean och StDev)

## Att testa för normalfördelning




**Minitab:**
Graph / probability Plot
Distribution = Normal
(utan Mean och StDev)

## Att testa för normalfördelning

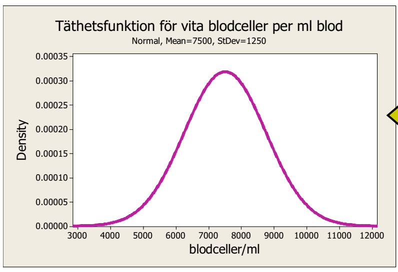



Stat /
Basic Statistics /
Normality Test

## Exempel 2

*McKillup s. 80*

- känd fördelning: antalet vita blodceller per ml blod hos friska vuxna: $\mu=7500$; $\sigma=1250$ (mätt hos miljontals människor, kan därför anses som populationsparametrar)




**Minitab:**
Graph / Probability
Distr. Plot / View Single
Distribution: Normal
Mean: 7500
Standard dev: 1250
*(blodceller.MPJ)*

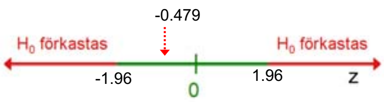
Stickprov: 7130, 6845, 7055, 7235, 7200, 7450, 7750, 7950, 7340, 7150
Ny "population": astronauter! samma μ? (vi antar att de har samma σ)

1. Nollhypotes:
   $H_0$: $\mu_0=7500$ (*ingen* förändring)
   $H_a$: $\mu_0 \neq 7500$ (förändring)
2. Signifikansnivå: $\alpha = 0.05$
3. Stickprovets medelvärde
4. Testvariabel z
5. z ∊ RR (kritiska området) → förkastas $H_0$

$$z_{krit} = \left(z < -\lambda_{\alpha/2};\ z > \lambda_{\alpha/2}\right)$$
$$= \left(z < -\lambda_{0.025};\ z > \lambda_{0.025}\right)$$
$$= \left(z < -1.96;\ z > 1.96\right)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = 7310.5$$

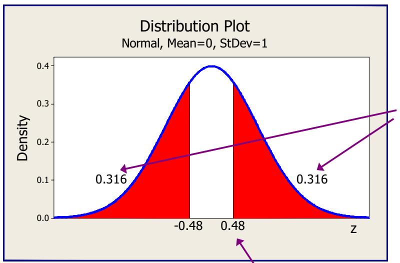
$$SEM = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1250}{\sqrt{10}} = 395.3$$
$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{SEM} = \frac{7310.5-7500}{395.3} = -0.479$$




# Vad är p-värdet ?

"The p-value is the probability of obtaining a result at least as extreme as the one that was actually observed, given that the null hypothesis is true." [*Wikipedia*]

**p-värdet** är sannolikheten att få ett resultat (z-värde) som är minst så pass extremt som det stickprovet gav (om man antar att $H_0$ gäller).




*tvåsidigt test*

$$p = 0.316 + 0.316 = 0.632$$

*p < 0.05*: resultatet är signifikant på 5% nivå,
*p < 0.01*: resultatet är signifikant på 1% nivå, osv.

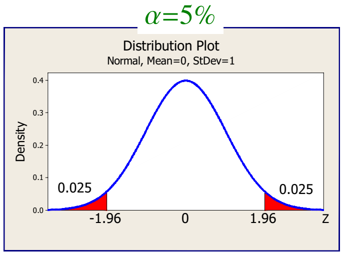
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{SEM} = \frac{7310.5 - 7500}{395.3} = -0.48$$

# Signifikansnivå

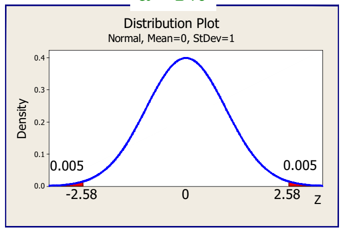
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Valet av signifikansnivån är subjektivt. Ett lägre signifikansnivå $\alpha$ betyder att vi är mera benägna att hålla fast vid nollhypotesen → bara om stickprovet är verkligen *mycket* osannolikt "under $H_0$" förkastar vi $H_0$.

$\alpha$=5%




$\alpha$=1%



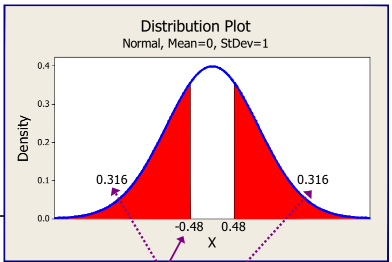

$H_0$ förkastas om z hamnar i det röda området (kritisk region för 2-sidigt z-test).

# Exempel 2 - Minitab

*z-test.MPJ*

- känd standardavvikelse: $\sigma$=1250
- Nollhypotes: $\mu_0$=7500
- Stickprov: 7130, 6845, 7055, 7235, 7200, 7450, 7750, 7950, 7340, 7150

Stat / Basic Statistics
1-Sample Z
Sample in column C1
Standard deviation: 1250
Perform hypothesis test
Hypothesized mean: 7500




***One-Sample Z: C1***

*Test of mu = 7500 vs not = 7500*
*The assumed standard deviation = 1250*

| *Variable* | *N* | *Mean* | *StDev* | *SE Mean* | *95% CI* | ***Z*** | ***P*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *C1* | *10* | *7311* | *330* | *395* | *(6536, 8085)* | ***-0.48*** | ***0.632*** |

# Testvariabel (Statistika)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Beräkning av en testvariabel dess fördelning är helt känd (under $H_0$), t.ex. z ~ N(0,1)
- Testvariabeln var noll[(1)] om stickprovet stämde exakt överens med nollhypotesen.
- Ju starkare testvariabeln avviker från noll, desto mindre trovärdigt blir det att nollhypotesen stämmer.
- Om testvariabeln överskrider ett kritiskt värde, så förkastas nollhypotesen, t.ex z < -1.96 eller z > 1.96
- Olika test har bara olika testvariabler → se nästa sida ....

[(1)] *kan också vara andra värden, t. ex ett i F-testet*

| Name | Formula | Assumptions |
|---|---|---|
| One-sample z-test | $z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{(\sigma/\sqrt{n})}$ | (Normal distribution **or** $n$ > 30) **and** $\sigma$ known. (z is the distance from the mean in relation to the standard deviation of the mean). For non-normal distributions it is possible to calculate a minimum proportion of a population that falls within k standard deviations for any k (see: Chebyshev's inequality). |
| Two-sample z-test | $z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ | Normal distribution **and** independent observations **and** both ($\sigma_1$ and $\sigma_2$ known) $H_0$: $\Delta\mu=\mu_1-\mu_2$ (inte noll) |
| One-sample t-test | $t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{(s/\sqrt{n})}$, $df = n - 1$ | (Normal population **or** $n$ > 30) **and** $\sigma$ unknown |
| Paired t-test | $t = \frac{\overline{d} - d_0}{(s_d/\sqrt{n})}$, $df = n - 1$ | (Normal population of differences **or** $n$ > 30) **and** $\sigma$ unknown |
| One-proportion z-test | $z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ | $n \cdot p$ > 10 **and** $n(1 - p)$ > 10 **and** it is a SRS (Simple Random Sample). |
| Two-proportion z-test, equal variances | $z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$, $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ | $n_1 p_1$ > 5 **and** $n_1(1 - p_1)$ > 5 **and** $n_2 p_2$ > 5 **and** $n_2(1 - p_2)$ > 5 **and** independent observations |
| Two-proportion z-test, unequal variances | $z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$ | $n_1 p_1$ > 5 **and** $n_1(1 - p_1)$ > 5 **and** $n_2 p_2$ > 5 **and** $n_2(1 - p_2)$ > 5 **and** independent observations |

# Two-Sample z-test

http://www.adryver.com/mybook/

$X_{1i} \in N(\mu_1, \sigma_1)$ $\quad$ *$\sigma_1$ känd*

$X_{2i} \in N(\mu_2, \sigma_2)$ $\quad$ *$\sigma_2$ känd*

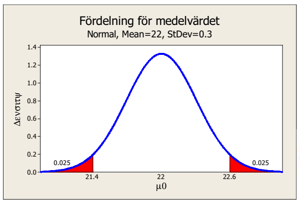
$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2$

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad statistika\ ;\ N(0,1) - fördelad\ (om\ H_0\ sann)$$

$$I_{\Delta\mu} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (1-\alpha)\cdot 100\%\ \ konfidensinterval\ \ för\ \ \Delta\mu$$

Värdet av z säger oss igen om z kan vara N(0,1)-fördelad ... och därmed om $H_0$ kan accepteras.

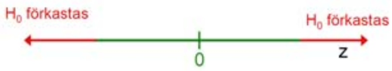
## Ensidigt och tvåsidigt test

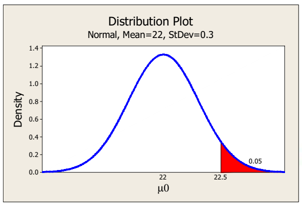



tvåsidigt: *"two-tailed"*

$H_0$: $\mu = \mu_0$

$H_a$: $\mu \neq \mu_0$

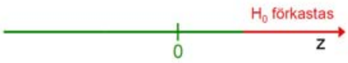


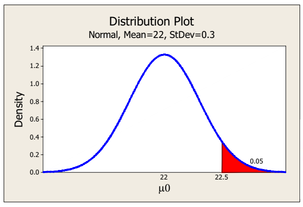

ensidigt:

$H_0$: $\mu = \mu_0$

$H_a$: $\mu > \mu_0$



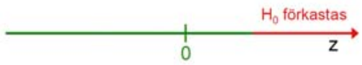

## Ensidiga test

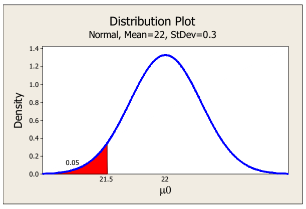



ensidigt:

$H_0$: $\mu = \mu_0$

$H_a$: $\mu > \mu_0$

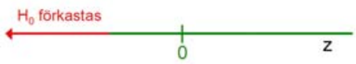



ensidigt:

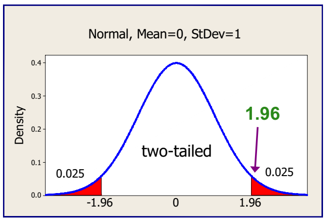
$H_0$: $\mu = \mu_0$

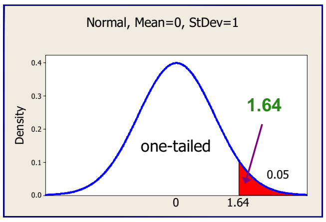
$H_a$: $\mu < \mu_0$




## Användning av ensidiga test

Med ett ensidigt test är det "lättare" at få ett signifikant resultat:

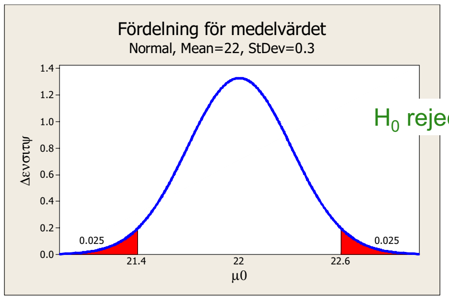



Ett ensidigt test kan användas om man *med säkerhet* vet att en eventuell förändring kan bara gå i en viss riktning ($H_a$ ***måste*** ligga på den ena sidan). Om man inte vet i vilken riktning en förändring kan gå, måste ett tvåsidigt test väljas. Om man tvivlar → tvåsidigt test (t.ex. med vikten av barn).

## Fel typ 1 (type 1 error)

*McKillup s. 97 ff.*

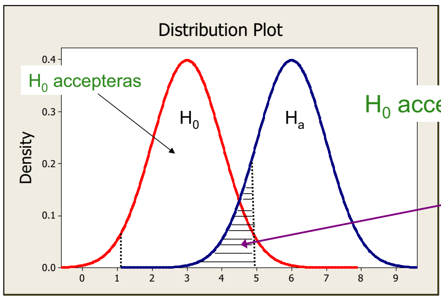



$H_0$ rejected but it's true!

$\alpha$

Vi förkastar $H_0$ om vi hamnar i det röda området. Risken är 5% att vi gjorde fel, ty: värden i det röda området är *osannolika, men inte omöjliga*.

## Fel typ 2 (type 2 error)



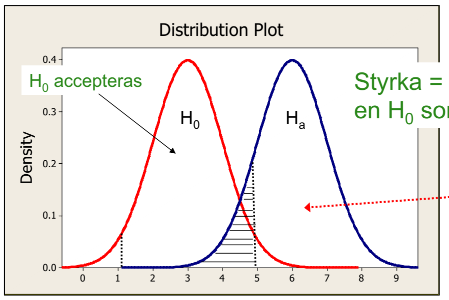

$H_0$ accepted but it's false!

$\beta$

*Problem:* $\alpha$ mindre
$\beta$ större

Vi accepterar $H_0$ om vi hamnar i det inre området för $H_0$. Vi har gjort fel om $H_a$ är sann. Sannolikheten för detta är lika med den markerade arean.

## Testets styrka (Power of a test)



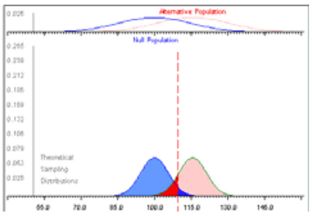

Styrka = Slh. att förkasta en $H_0$ som är inte sann

$1-\beta$

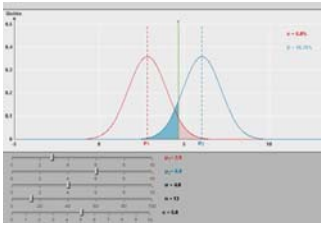
Om $H_a$ är sann: Det finns en chans att vi ändå antar $H_0$, nämligen det markerade området. Chansen att förkasta $H_0$ om $H_a$ är sann är alltså ett minus den markerade arean.

McKillup s. 99

# Styrkan beror av σ, Δμ och n




http://wise.cgu.edu/power/power_applet.html



http://www.fernuni-hagen.de/newstatistics/
→ *Interferential statistics* → *Type 1 and Type 2 errors*

*Java-Applets*

# Power Curve / Minitab

Stat /
Power and Sample Size
1-Sample Z

*power = 1 är vad man vill ha!*