

**Instruktioner**

Skrivtid 08:15-14:00. Tillåtna hjälpmedel: Dator, litteratur, anteckningar.

Lösningarna skall vara försedda med förklaring hur problemet lösts, motiveringar, samt relevanta figurer där så är nödvändigt. Matematikuppgifterna står före statistikuppgifterna, men detta innebär naturligtvis inte att du behöver behandla problemen i den ordningen. För godkänt betyg (3) på kurserna krävs godkänt betyg på såväl detta prov som det separata dataprovet, och för godkänt betyg på detta prov krävs minst 20 poäng av totalt 40 med rimlig fördelning mellan matematik och statistikdelarna. För högre betyg (4 och 5), krävs att poängsumman på båda proven är minst 65 % respektive minst 85 % av totalsumman. I detta prov är varje problem värt 5 poäng.

**Matematikproblem**

1. Populationsstorleken hos en population av skalbaggar modelleras genom följande rekursiva följd:

$$x_{n+1} = \frac{1,374x_n}{(1 + 0,0034x_n)^{0,792}}, \quad x_0 = 4$$

Beräkna  $x_{20}$ .

2. För djurgruppen Metatheria (pungdjur) observeras följande data för syreförbrukningshastigheten  $V$  (liter per timme) och kroppsmassan  $m$  (kg):

$m$	0,62	0,98	1,45	1,53	1,86	2,21	2,88	3,24	3,96
$V$	2,19	2,53	2,77	2,76	3,03	3,13	3,28	3,42	3,58

Anpassa ett allometriskt samband till dessa data.

3. En ung biologistudent med starkt intresse av hälsofrågor startar ett eget företag för att tillverka kosttillskott med vitaminer. Studenten inser att det inte går att marknadsföra en och samma sammansättning till kunder med olika behov. Beslutet blir att tillverka fyra preparat, som kallas LättVit, MedVit, HögVit och XtraVit. Preparaten innehåller niacin, folsyra, C-vitamin och E-vitamin i följande kombinationer (samtliga vitaminer i milligram och per tablett). LättVit: 10, 0, 60 och 50, MedVit: 20, 10, 120 och 100, HögVit: 30, 25, 180 och 250 samt XtraVit: 50, 40, 230 och 500. En av de potentiella kunderna behöver under en vecka 220 mg niacin, 120 mg folsyra, 1250 mg C-vitamin och 1550 mg E-vitamin. Hur många tabletter av varje slag behöver den potentiella kunden för att tillfredsställa sitt behov?

4. Anta att man för en hotad djurart kan använda följande demografiska modell. Livscykeln delas in i 7 åldersklasser, där varje klass är ett år lång. Chansen att överleva till den nästkommande klassen, samt den genomsnittliga avkomman för de olika klasserna listas i nedanstående tabell.

Klass	Ålder	P(överlevnad)	Genomsnittlig avkomma
1	0-1 år	0.2	-
2	1-2 år	0.3	-
3	2-3 år	0.8	-
4	3-4 år	0.9	3.1
5	4-5 år	0.8	5.4
6	5-6 år	0.7	5.2
7	6-7 år	0	2.3

- a) Med hur många procent minskar populationen årligen?
- b) Bestäm den stabila åldersfördelningen (uttryckt i procent).
- c) I ett försök att förbättra artens situation har man ett val mellan följande två åtgärder: Strategi 1 ökar approximativt överlevnadschansen för klass 1 till det dubbla. Strategi 2 ökar överlevnadschansen i klasserna 3, 4 och 5 till cirka 95 %, samt i klass 6 till 80 %. Givet att de ekonomiska resurserna är begränsade och man bara kan genomföra en av dem, vilken bör man satsa på? Motivera ditt svar!
5.  $X$  är en insekt som gör stor skada på grödan och man är därför intresserad av att hålla populationsstorleken så låg som möjlig.  $X$  har en naturlig fiende, insekten  $Y$ ; sambandet mellan populationsstorlekarna  $x$  resp.  $y$  (angivna i miljoner insekter) beskrivs av Lotka-Volterrasystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 0.2xy \\ \frac{dy}{dt} = 0.01xy - y \end{cases}$$

där tiden  $t$  mäts i år. Ett år, när antalet skadeinsekter är 200 miljoner och antalet nyttiga insekter 8 miljoner, beslutar man sig för att som en engångsåtgärd använda sig av kemiska bekämpningsmedel. Man lyckas på så sätt utrota 99 % av skadeinsekterna. Tyvärr försvinner också 50 % av de nyttiga insekterna på kuppen.

- a) Hur stor skulle populationen av skadeinsekter ha varit när den varit maximalt stor om man inte gjort den kemiska bekämpningsinsatsen?
- b) Hur många skadeinsekter får man som värst efter insatsen?

## Statistikproblem

6. För 15 honor av bisamråtta med nyfödda ungar mätte man bland annat längden av modern och huvudbredd hos den äldsta avkomman. Syftet var att se om det fanns ett samband mellan moderns längd och olika storhetsmått hos ungarna. Följande värden erhöles:

Familj nr	1	2	3	4	5	6	7	8
Moderns längd $x$	8.7	8.5	9.4	10.0	6.3	7.8	11.9	6.5
Avkommans huvudbredd $y$	5.95	5.65	6.00	5.70	4.70	5.53	6.40	4.18
Familj nr	9	10	11	12	13	14	15	
Moderns längd $x$	6.6	10.6	10.2	7.2	8.6	11.1	11.6	
Avkommans huvudbredd $y$	6.15	5.93	5.75	5.68	6.13	6.30	6.03	

De som är inblandade i undersökningen är angelägna om att beskriva sambandet mellan de båda variablerna och man funderar på att beräkna någon form av korrelation, men frågan är vilken som är lämpligast i detta fall, Pearsons eller Spearmans. Man misstänker att skalan för kroppslängd inte är proportionell mot skalan för huvudets bredd.

- Plotta  $x$  mot  $y$  i ett diagram. Verkar sambandet vara linjärt? Gör en subjektiv bedömning.
  - Ersätt observationerna med ranger för  $x$  respektive ranger för  $y$ . Verkar sambandet mellan rangvärdena vara linjärt? Gör också här en subjektiv bedömning. *Anm.* För att bilda rangerna för talen i en kolumn C1, exempelvis, går man in i det övre fönstret, klickar på *Enable commands* under *Editor* och skriver sedan kommandot `let C2=rank(C1)`
  - Vilket korrelationsmått verkar mest rimligt om man någorlunda väl vill beskriva sambandet mellan de båda variablerna, dels med tanke på förutsättningarna och dels mot bakgrund av vad man kan utläsa av de plottarna? Vad karakteriserar Pearsons respektive Spearmans korrelation? Ge en kort beskrivning.
  - Bestäm såväl Pearsons som Spearmans korrelation. Vad drar du för slutsats angående det mått du valt?
7. Vid ett företag som tillverkar motorgräsklippare har man prövat olika tillsatser i bensinen för att uppnå en effektivare förbränning, vilket i sin tur leder till minskade kolväteutsläpp. Vid en undersökning lät man avgaserna passera en specialbyggd kammare liknande dem som förekommer vid bilprovningar. Man använde sig av sju gräsklippare av samma märke som fick köra vardera under en halvtimme på en större gräsplan utan synbarliga variationer i grästillväxt. För varje klippare singlarde man slant om ordningen mellan bensintyperna, det vill säga mellan en variant som bestod av enbart bensin och en som hade en viss andel tillsats. Efter varje körning tömdes tank och motor helt på bränsle. Följande resultat erhöles (anger mängden utsläpp i viss enhet):

Klippare nr	1	2	3	4	5	6	7
Med tillsats	7.0	10.2	9.3	8.9	11.8	8.5	10.1
Utan tillsats	8.3	10.8	10.9	10.2	12.7	8.6	11.9

Differenserna mellan mätvärdena för de sju gräsklipparna kan antas vara normalfördelade med samma varians och med konstant väntevärde.

(forts. uppgift 7:)

- a) Leder tillsatser till minskade utsläpp av kolväten? Genomför ett lämpligt test som på 5 % signifikansnivå. Bör testet vara ensidigt eller tvåsidigt? Ange hypoteser och beskriv testet i detalj. Det ska tydligt framgå vilken regel som används för att förkasta respektive inte förkasta nollhypotesen.
- b) Följande fråga besvaras endast om testet i a) påvisar en sänkning: Kan man vara någorlunda säker på att minskningen uppgår till minst 1.5 enheter? Motivera din slutsats.
8. På en försöksstation för bland annat tomatodling ville man undersöka hur sötman hos tomater påverkades vid ympning av olika tomatorter på skilda grundstammar. För enkelhets skull nöjer vi oss här med att studera en ädelsort av tomat, Bolzano, och jämföra tre grundstammar: Beaufort, Maxifort och PG76, kortare betecknade B, M och P. Man använde sig av s.k. sensorisk analys, där man med en välutbildad panel av personer bedömde sötman hos tomater enligt en viss mall. Ju högre värde desto högre grad av sötma. Ympningen skedde genom att man lät toppen av en ädelsort växa samman med en grundstam. Det hela utfördes med 15 sådana toppskott som randomiserades över grundstammarna, fem av varje. Resultat:

B	M	P
2.4	1.7	2.1
2.0	2.1	1.6
2.4	1.8	1.9
1.7	1.9	1.6
2.6	1.6	1.4

Låt oss anta att observationerna är normalfördelade med konstant standardavvikelse.

- a) Testa på 5%-nivån om det föreligger någon skillnad mellan grundstammarna vad beträffar sötman. Ställ upp hypoteser, ange teststorhet samt visa hur testet utförs. Teststorheten beräknas som kvoten mellan två värden. Vilka? Ange antalet frihetsgrader i täljare respektive nämnare.
- b) Vi bör naturligtvis kontrollera att villkoren för testet är uppfyllda. Gör detta genom att studera lämpliga grafer. Kommentera dessa.
- c) Använd Tukey's metod på 5%-nivån för att avgöra om det finns eventuella signifikanta parvisa skillnader mellan grundstammarna. Är det någon grundstam som du är beredd att rekommendera framför de övriga (dvs. med högre grad av sötma än de övriga)? Motivera!