UPPSALA UNIVERSITET

Tentamen
Matematik och statistik för biologer
Kvantitativ biologi
2009–03–16

OBS! Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text. Om du inte kan få till en fullständig lösning, försök då att ange i ord hur du tänkt och hur långt du kommit. Välj lämpliga beteckningar för matematiska storheter.

Matematikproblem

1. *(5p)* Vi har ett allometriskt samband mellan två storheter X och Y som har formen

$$Y = \frac{2}{3}X^{\frac{1}{2}}.$$

Antag att X är den totala massan i kg av något och Y är massan i kg av en del av detta något.
a) Om massan av delen är 10 kg hur stor är då den totala massan enligt det allometriska sambandet?
b) Hur ser det allometriska sambandet mellan andelen Y *av* X och X ut?
c) Om vi skulle plotta det allometriska sambandet i ett diagram med både X- och Y-axeln logaritmerade får vi en rät linje $y = kx + m$ i de nya variablerna x och y. Bestäm linjens ekvation.

2. *(5p)* Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Hitta egenvärdena och egenvektorerna till A.
b) Låt

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

. Beräkna

$$A^{11}b.$$

(Tips: Finns (minst) två bra och en riktigt dålig metod ni känner till för att göra detta. Att börja utföra 11 matrismultiplikationer ger 0 poäng.)

3. *(10p)* Du utlyste en tävling som gick ut på att ta fram en formel för mängden y av ett visst ämne som en funktion av tiden t, dvs. $y = y(t)$, i ett visst biologiskt system du länge experimenterat med. Du har massvis av observationsdata men vill inte sprida dem så du beskrev bara själv systemet grovt och hoppades få in en bra lösning du själv sen kunde kolla mot data. Tre bidrag kom dock i form av olösta differentialekvationer så du måste själv lösa dem, bara att sätta igång.
a) Lös

$$y' = \frac{1}{t} - 2t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

b) Lös

$$y' = 3\frac{t}{y}.$$

c) Lös

$$y' - 3y = t.$$

d) Lösningarna från a) och b) är absolut inte vad du söker, men c) var intressant så du vill testa den mot dina experimentella data. Du tar därför begynnelsevärdet y(0)=1 (då det korresponderar mot ditt experiment) och löser begynnelsevärdesproblemet som ekvationen i c) och detta begynnelsevärde utgör. Vad blir lösningen?

e) Enligt dina experiment verkar mängden y av ämnet efter lång tid stabilisera sig kring 0.33. Är detta förenligt med lösningen du fick i d)? Om inte, vilket gränsvärde går y, enligt modellen, emot då tiden går mot oändligheten?

4. (5p) Betrakta differentialekvationen

$$y' = y - 0.1y^2$$

.
a) Finn alla jämviktslösningar till ekvationen.
b) För varje jämviktslösning du fann i a), avgör om den är attraherande eller repellerande.
c) Anta att y är en funktion av tiden t, dvs. $y = y(t)$. Om vi har ett begynnelsevärdesproblem med ovanstående ekvation och vilket positivt begynnelsevärde som helst, vilket värde kommer då $y(t)$ att ligga nära efter 'lång' tid?
(Tips: Vilken vida känd ekvation är denna ett specialfall av? Kan användas för test av lösningar mm.)

5. (5p) Antalet bakterier $y = f(x)$ (i tiotusental) i en odling varierar med temperaturen x grader som

$$f(x) = xe^{-x^2} + 1$$

. Alltså, antalet odlingen stabiliserar sig på viss temperatur. För temperaturer mindre än minus en halv och större än två grader är modellen värdelös, så vi ska bara undersöka den för temperaturer x sådana att $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.
a) Vid vilken temperatur i detta intervall finns flest bakterier i odlingen och hur många är det då? När finns det minst och hur många finns då?
b) På vilka temperaturintervall (av intresse) växer antalet bakterier och på vilka avtar det?

Statistikproblem

Uppgift 6 3 poäng

Blodsockerhalten hos friska vuxna kan antas vara normalfördelad med väntevärdet (medelvärdet) 100 och standardavvikelsen 10 (allt i milligram per deciliter).

a) Ange sannolikheten att en slumpmässigt vald vuxen har en blodsockerhalt som är större än 115 mg/dl.

b) Skissa täthetsfunktionen för blodsockerhalten. Markera medelvärdet och arean som motsvarar den sannolikheten som söktes i deluppgift a).

Uppgift 7 4 poäng

Låt oss anta att 5% av befolkningen har en viss förändring i arvsmassan som dessbättre vanligtvis inte förorsakar någon sjukdom (ingen "fenotyp").

a) Man tar ett stickprov av storlek n ur denna befolkning och räknar hur många i stickprovet som bär på denna förändring. Låt detta antal vara slumpvariabeln X. Hur är X fördelad?

b) Man väljer slumpmässigt 10 personer ur denna befolkning: Hur stor är sannolikheten att få exakt två personer med denna förändring?

c) Man väljer slumpmässigt 10 personer ur denna befolkning: Hur stor är sannolikheten att få maximalt 3 personer med denna förändring?

d) Om man slumpmässigt väljer 10 personer: Hur stor är sannolikheten att få fler än 3 personer med denna förändring?

Uppgift 8 8 poäng (Observera att deluppgifterna kan lösas oberoende av varandra)

Kroppens syreupptagningsförmåga hos människor är viktig för det allmänna hälsotillståndet och mäts i liter per minut. Ett stort värde är bra. Erfarenhet visar att syreupptagningsförmågan kan antas vara normalfördelad.

a) I en grupp bestående av 5 personer mättes syreupptagningsförmågan. Man erhöll följande resultat: (2.45, 2.2, 2.05, 2.23, 2.62). Ange (det aritmetiska) medelvärdet och standardavvikelsen i detta stickprov.

b) En annan grupp bestående av 6 personer genomförde en speciell konditionsträning för att förbättra syreupptagningsförmågan. Man erhöll det aritmetiska medelvärdet $\bar{y} = 2.51$ och stickprovsstandardavvikelsen $s_y = 0.21$. Välj ett lämpligt test för att pröva om det finns en statistiskt signifikant skillnad mellan medelvärdet för denna grupp och gruppen i del a). Anta att båda populationer är normalfördelade och att populationsvarianserna är lika för båda grupperna. Välj 5% signifikansnivå och formulera nollhypotesen och den alternativa hypotesen. Kan nollhypotesen förkastas? Vad betyder resultatet?

c) Efter utvärderingen av resultatet i b) beslutades att genomföra en ny undersökning. Hos 5 personer mättes syreupptagningsförmågan *före* och *efter* träningen. Man erhöll följande resultat:

Person	1	2	3	4	5
före	2.25	2.50	1.95	2.40	2.40
efter	2.40	2.70	2.20	2.55	2.65

Pröva på 5% signifikansnivå om det finns en skillnad mellan medelvärdet före och medelvärdet efter träningen. Kan nollhypotesen förkastas? Vad betyder resultatet?