Linjära avbildningar i $\mathbb{R}^2$ - det tvådimensionella planet

1. Räkna ut
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} =$$
2. Räkna ut
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
3. Räkna ut
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
4. Räkna ut
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
5. Räkna ut
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
6. Räkna ut
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$
7. Rita ut resultatvektorerna i uppgift 1 och uppgift 3.
8. Rita ut resultatet på ett ungefär för uppgift 6 om $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ är som på bilden.
9. Så multiplikationen med $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ från vänster verkar resultera i en spegling. Vilken linje speglas vektorerna i (rita linjen)?

   • Egentligen så har vi fuskat lite, ty vektorerna brukar skrivas som $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ och inte $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Om man jämför uppgifterna 3 och 5 så kan man egentligen räkna på båda sätten. Men skriver man på formen $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, måste matrisen stå på höger sida för att multiplikationen ska funka. Skriver man på formen $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, måste matrisen stå på vänster sida. Vi föredrar det senare sättet, eftersom det påminner om $f(x)$ (vi har $A(\vec{v})$).
10. Gissa matrisen A som funkar på följande sätt:
$$\begin{cases} A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$
$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

11. Vad är

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=$$

12. Rita ut $A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

13. Gissa matrisen

$$B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/34\\76\end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi\\0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

14. Vad är

$$\begin{pmatrix}1/2&-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

15. Vad är

$$\begin{pmatrix}1/2&-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=$$

16. Vad är

$$\begin{pmatrix}1/2&-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix}=$$

17. Rita ut resultaten.

   - Eftersom vektorer kan likställas med punkter, kan man prata om vad hela samlingar av punkter avbildas på genom matrismultiplikation.

18. Vad avbildas cirkelsegmentet på med matrisen $\begin{pmatrix}1/2&-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}$?

19. Om

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix},$$

vad är då

$$A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=$$

(Lös utan att räkna ut A).

   - Notera att A här kan faktiskt vara olika matriser. Både $A_1=\begin{pmatrix}5&0\\0&7\end{pmatrix}$ och $A_2=\begin{pmatrix}2&3\\8&-1\end{pmatrix}$ passar. De är olika, men ger samma svar på uppgiften.

20. Om

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

och

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

vad är då

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=$$

(Lös utan att räkna ut A).

21. Om

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}75\\\sqrt{7}\end{pmatrix}$$

och

$$A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$$

vad är då

$$A\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}=$$

(Lös utan att räkna ut A).

- Detta är vad linjär avbildning egentligen betyder, att

$$A(k\,\vec{v})=k\cdot A(\vec{v})$$

och

$$A(\vec{u}+\vec{v})=A(\vec{u})+A(\vec{v})$$

dvs vi kan först multiplicera vektorn med en konstant och sedan avbilda den, eller först avbilda vektorn och sedan multiplicera den med en konstant. Exakt samma med addition - först addera och sedan avbilda, eller först avbilda och sedan addera - spelar ingen roll för resultatet.

Som man ser i uppgift 21, så är det tillräckligt med bilderna av två linjärt oberoende vektorer för att bestämma bilden av alla vektorer (med andra ord bestämma matrisen). Man väljer ofta $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ som i uppgifterna 13 och 14 – 15, för då är det lättare att bestämma matrisen.

Med tanke på det, bestäm kaninens matris:

22.

$$A_r=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

23.

$$A_s=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

24.
$$A_k = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

25. Nu blev kaninen tillplattad! Stackars kanin! (Bestäm matrisen i alla fall)
$$A_p = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

26. Går det att återskapa kaninen? Med vilken matris i så fall?
$$A'_r = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

27.
$$A'_s = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

28.
$$A'_k = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

29.
$$A'_p = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

- De avbildningar där det går att återskapa kaninen kallas $1-1$ (ett till ett). Det är just de matriser som har invers.

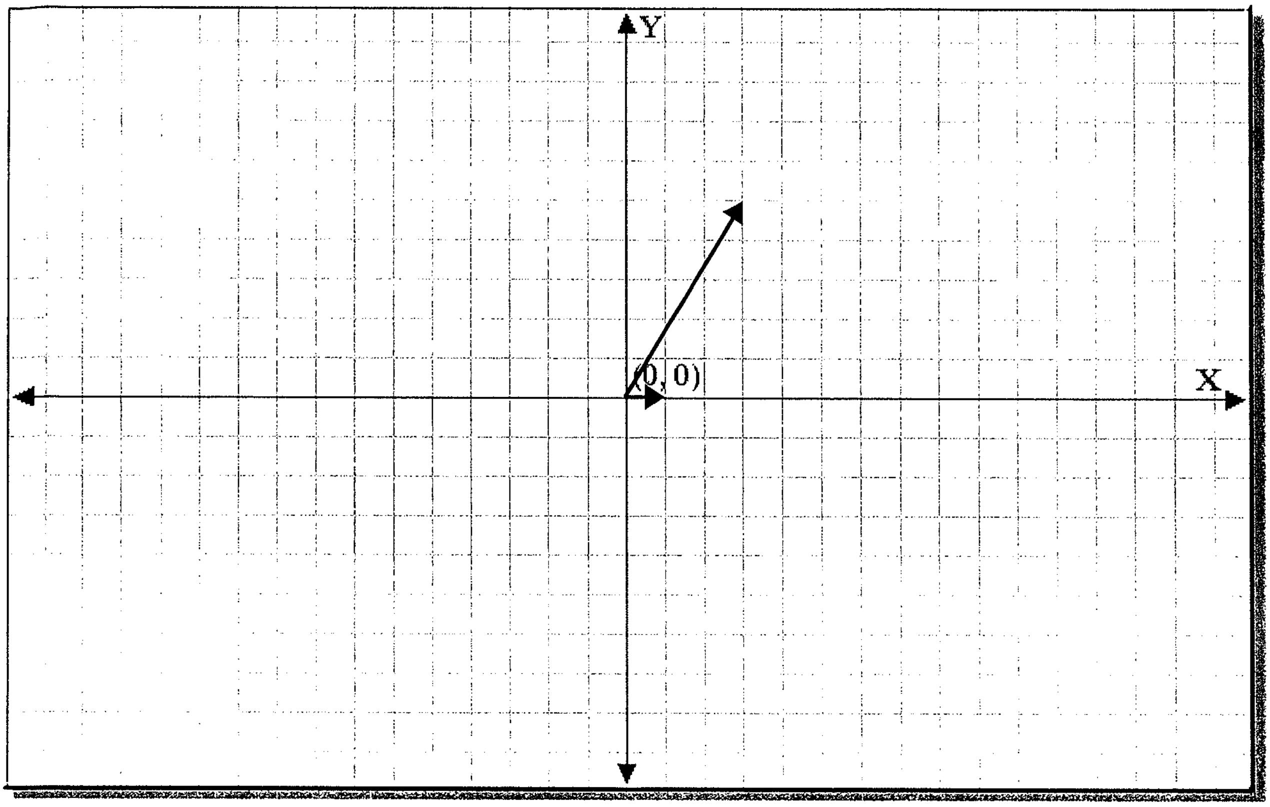
30. Vad är allmänna matrisen för att göra kaninen a gånger så tjock och b gånger så lång?
$$B_k = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

31. Vad är allmänna matrisen för att rotera kaninen moturs med vinkeln θ?
$$B_r = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

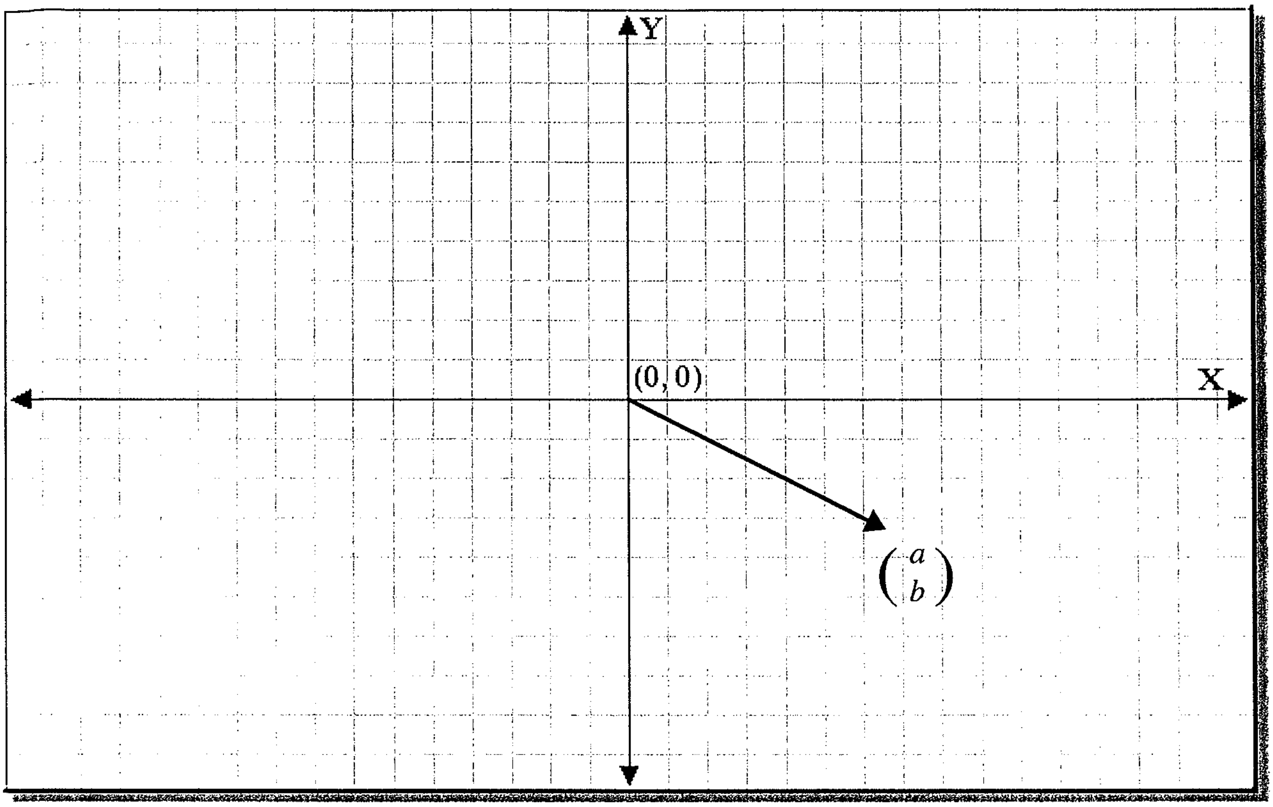
32. Vad är matrisen för att projicera kaninen på x-axeln?
$$B_{p_x} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

33. Vad är matrisen för att spegla kaninen i y-axeln?
$$B_{s_y} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

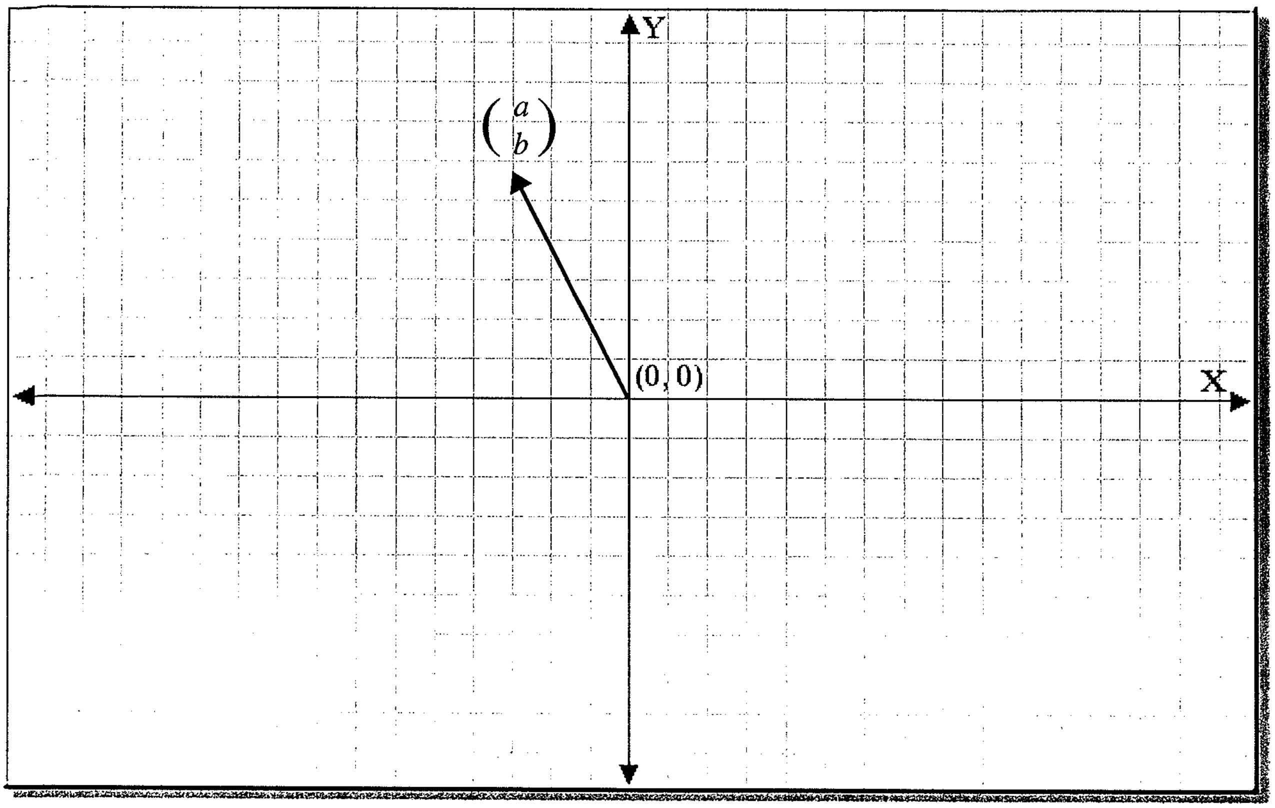
34. Vad är matrisen för att spegla kaninen i en godtycklig linje?
$$B_s = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$



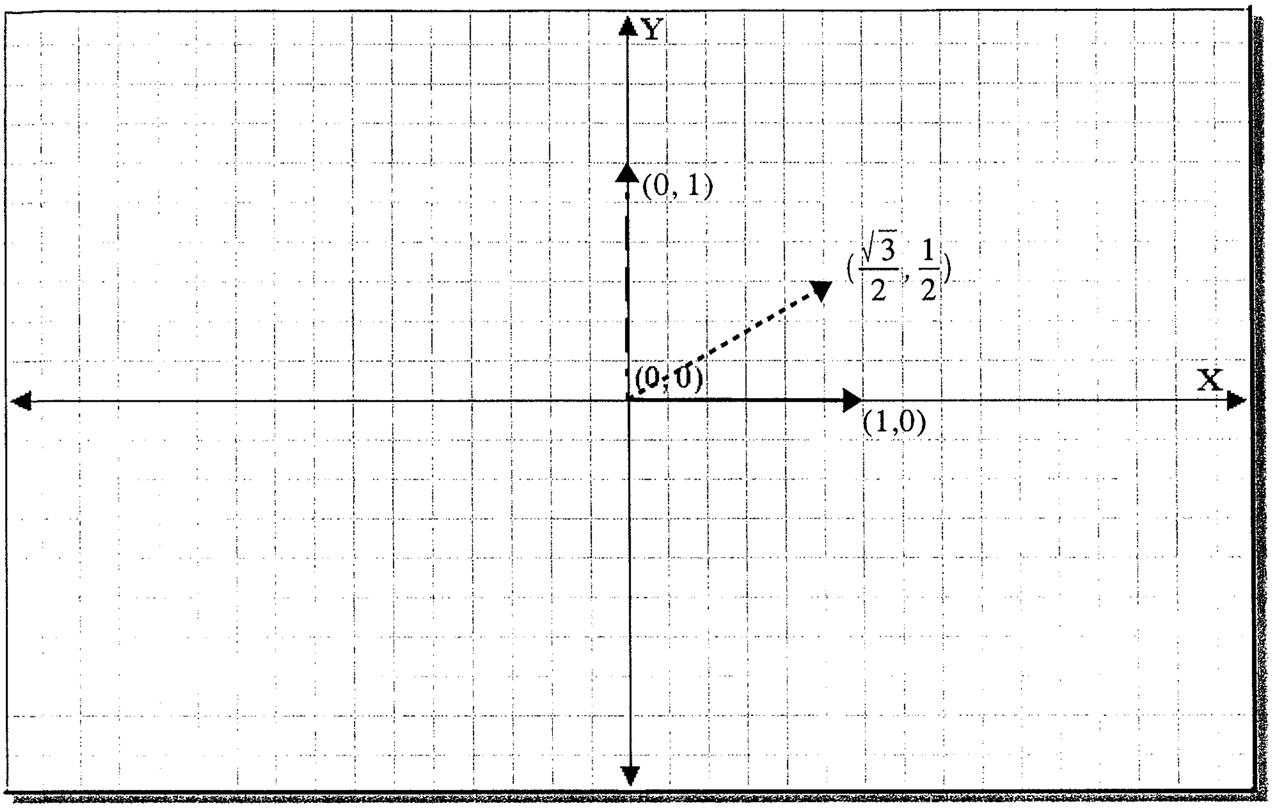
(Uppgift 7)



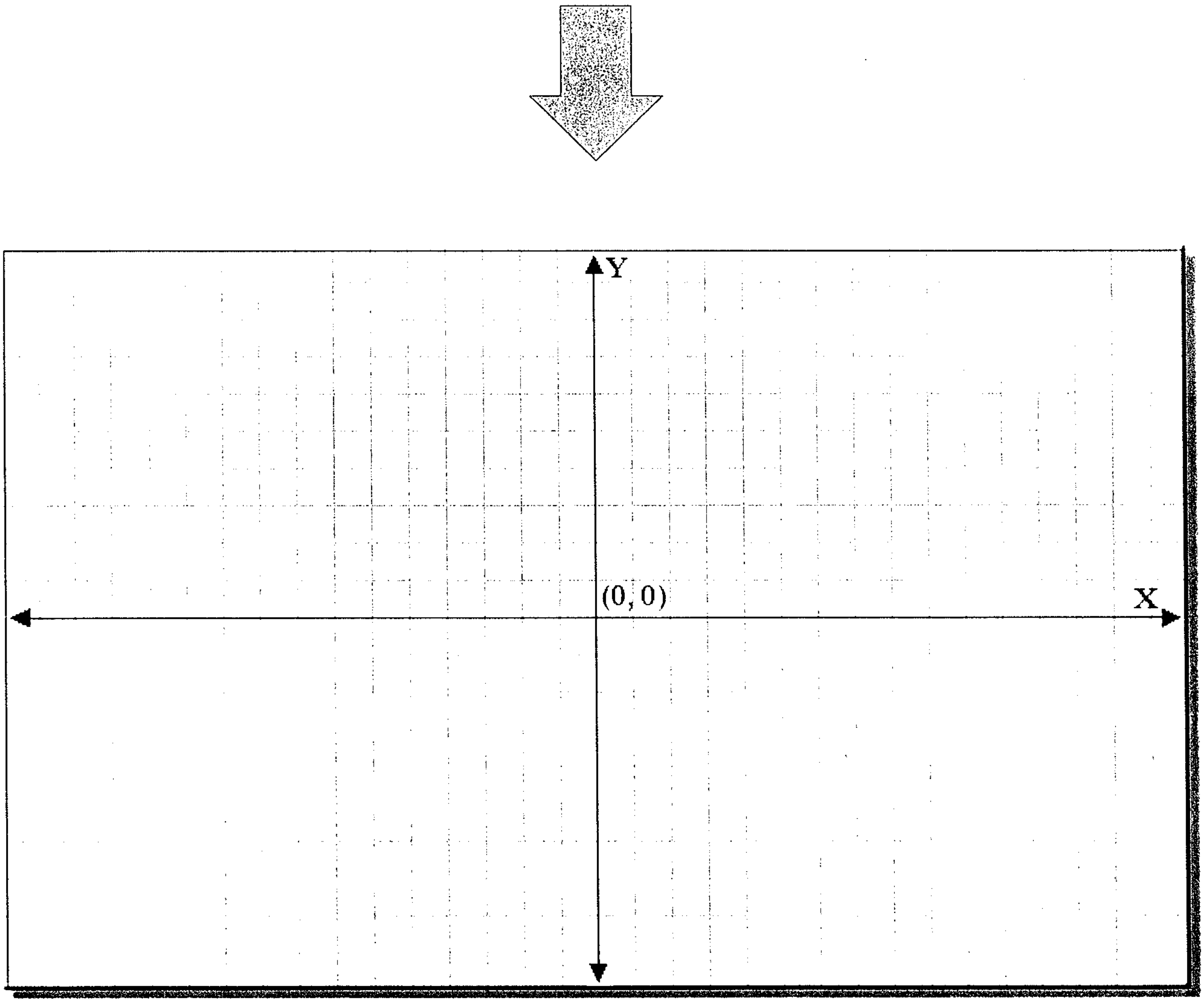
(Uppgift 8 och 9)

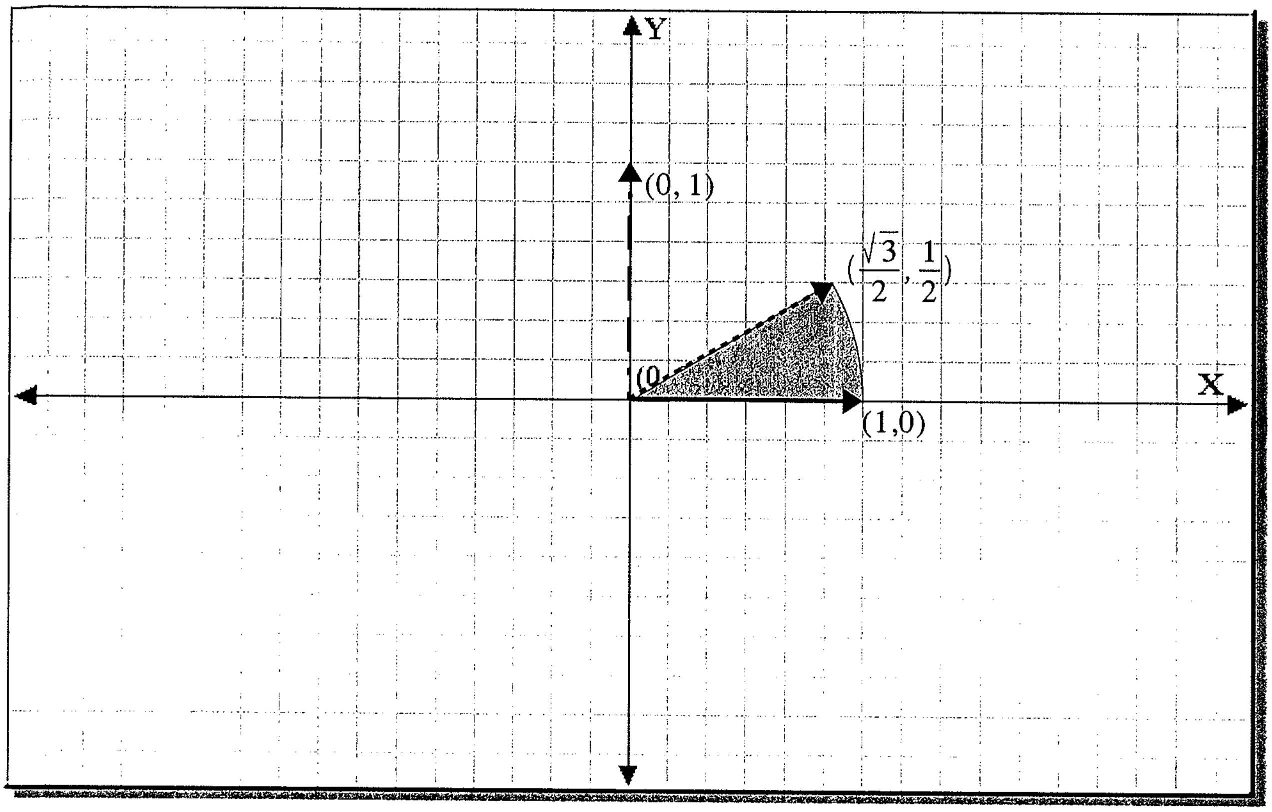


(Uppgift 12)

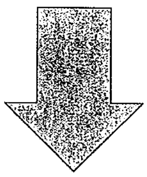


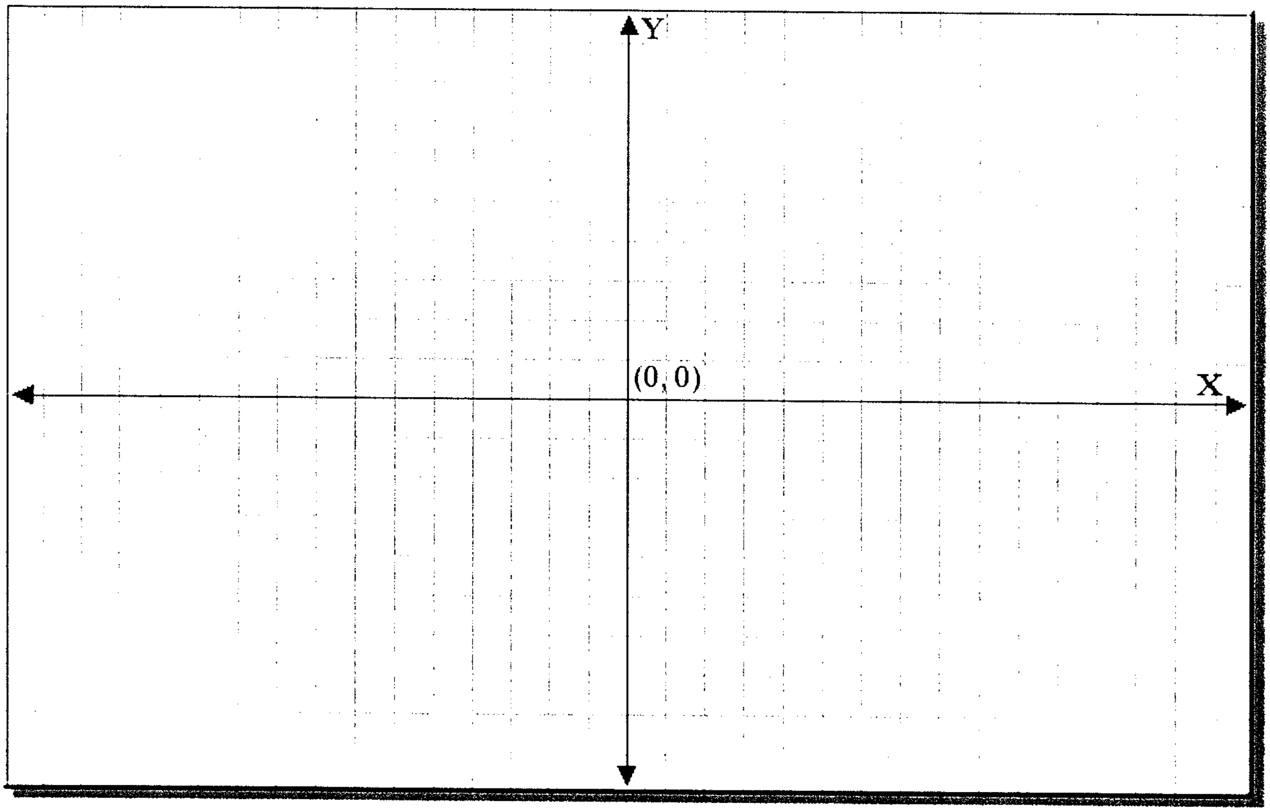
(Uppgift 17)

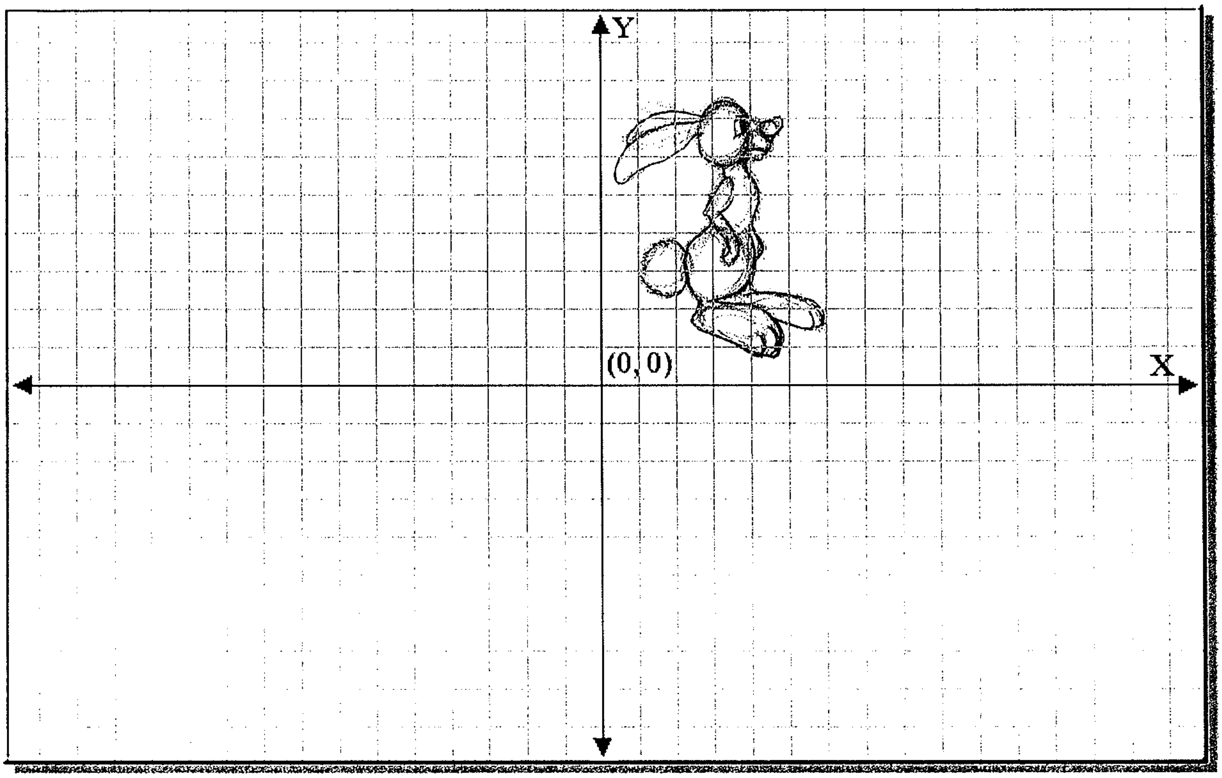




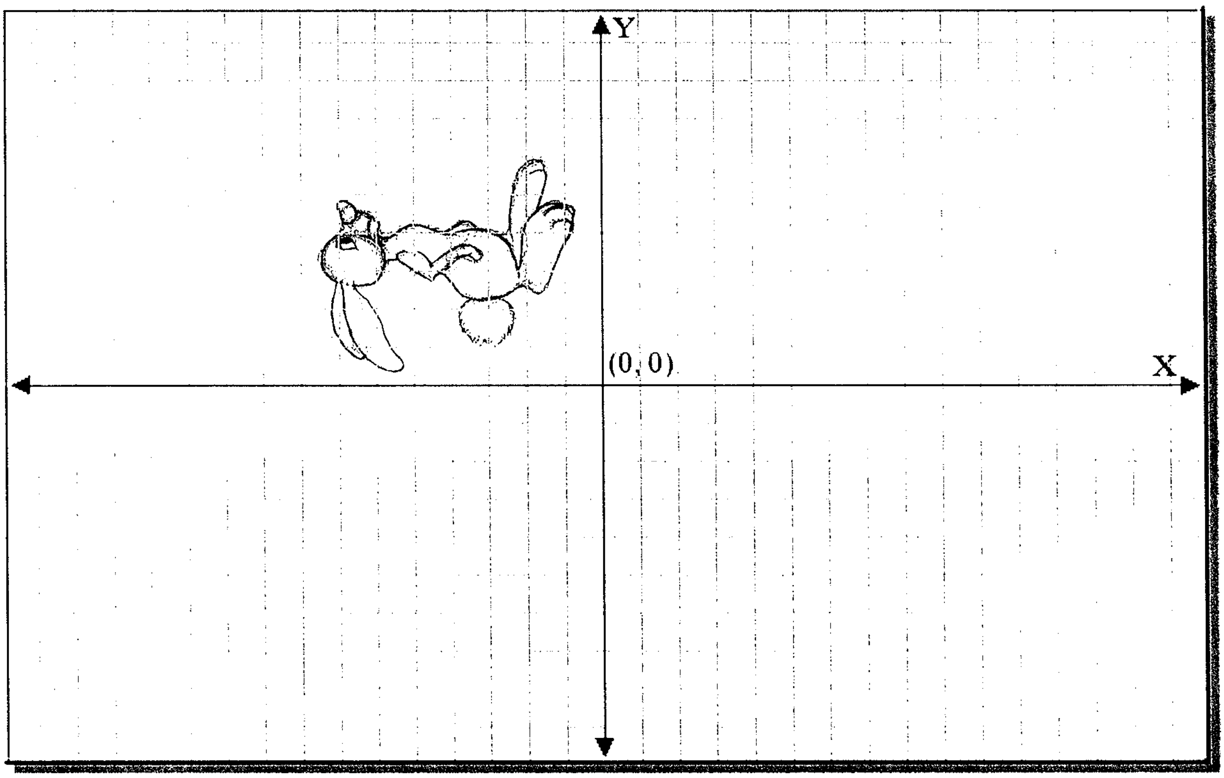
(Uppgift 18)

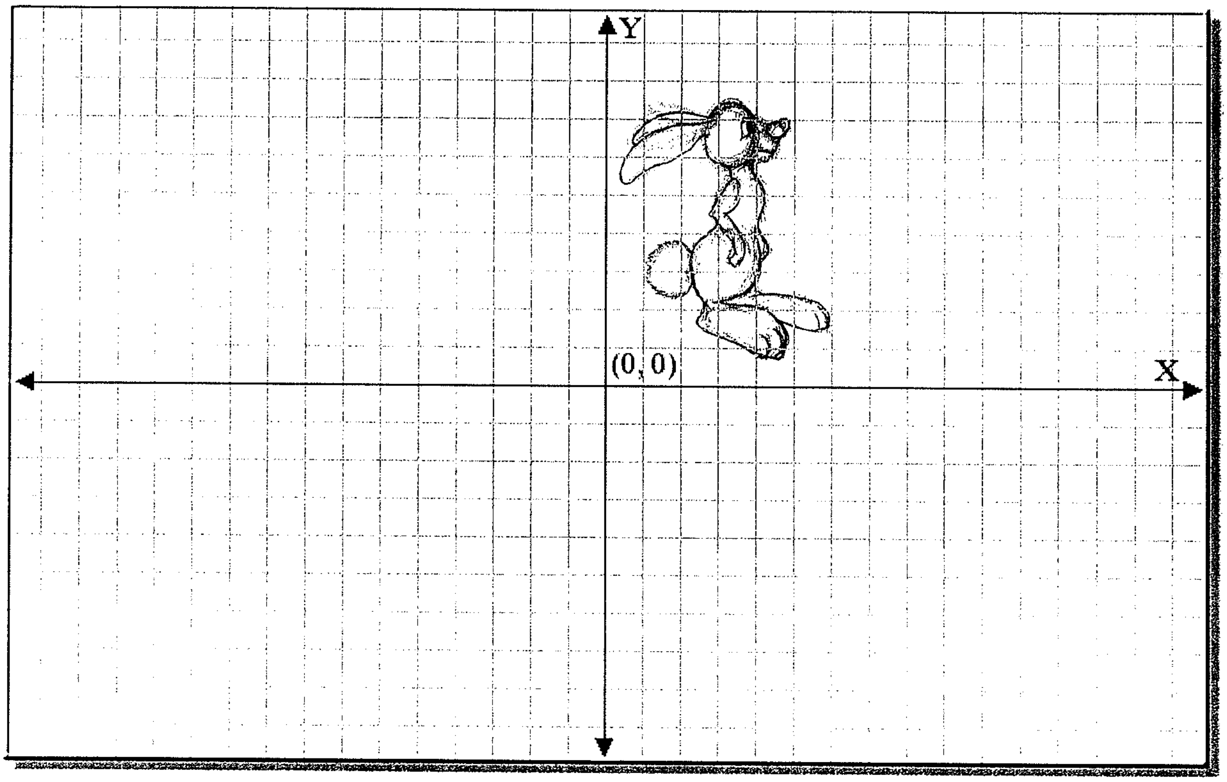






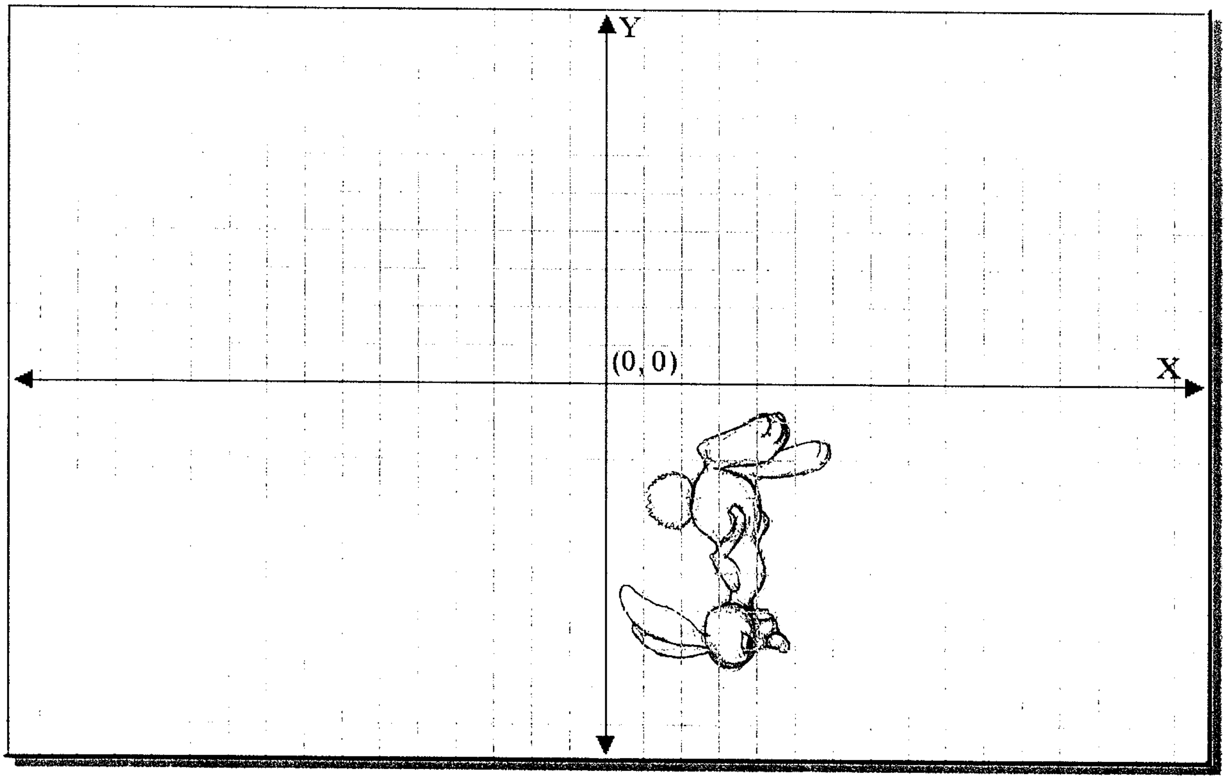
(Uppgift 22) (Uppgift 26)

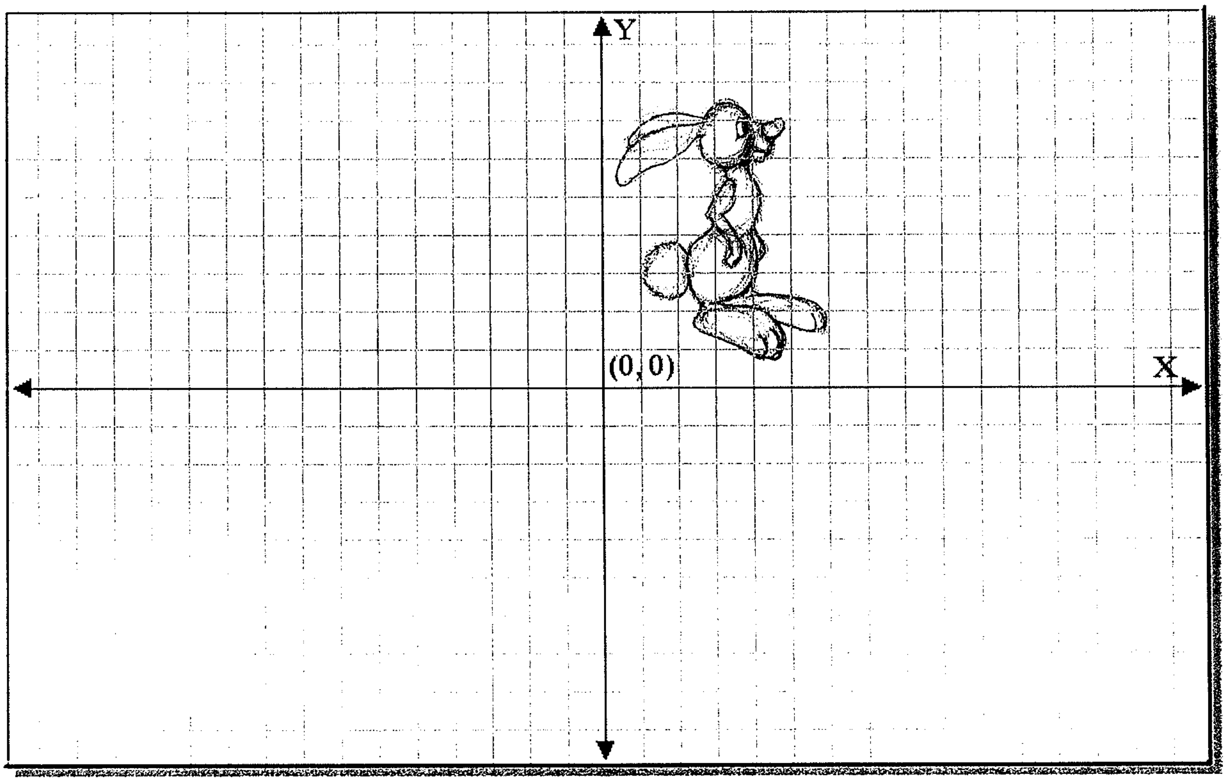




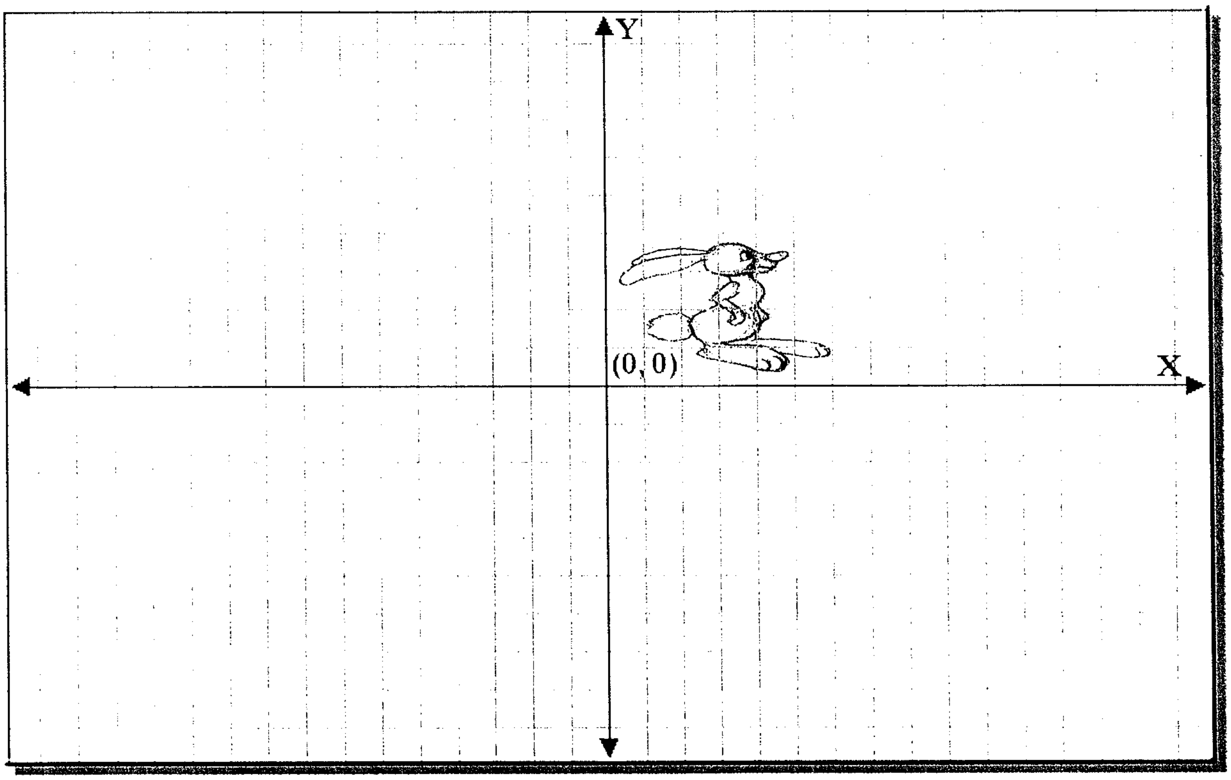
(Uppgift 23)

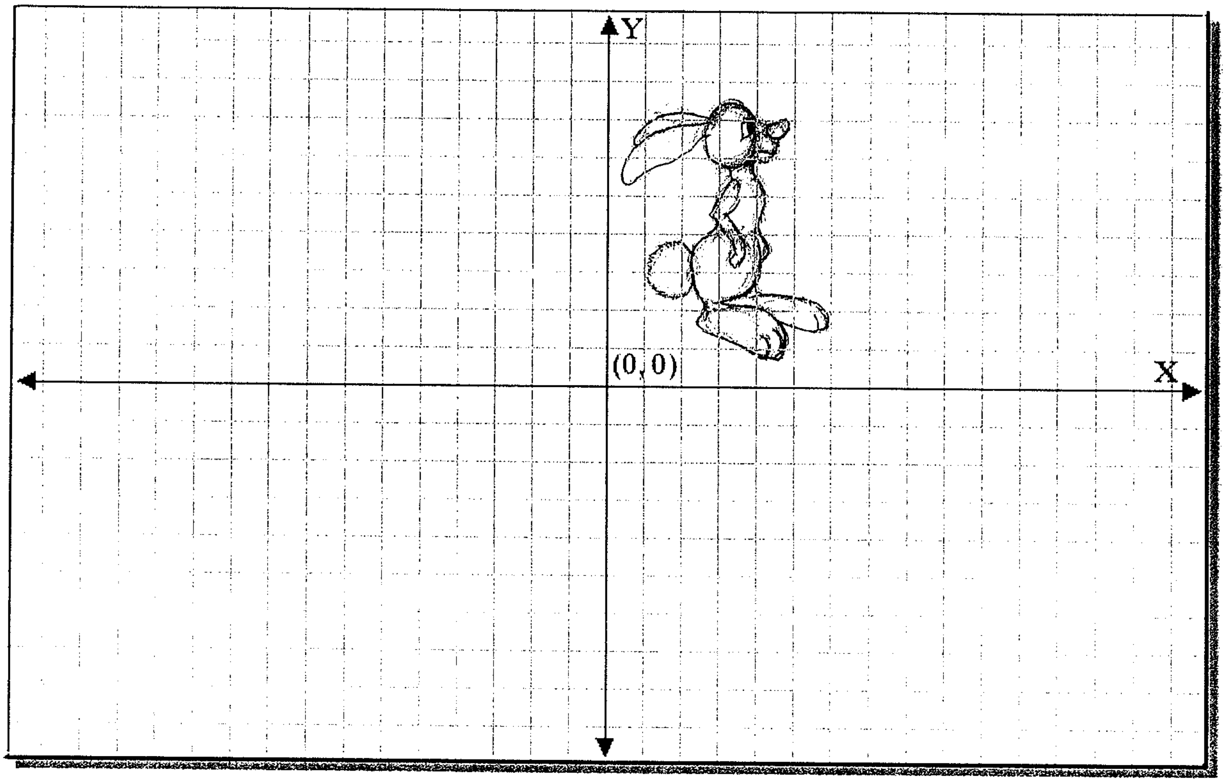
(Uppgift 27)





(Uppgift 24) ↓ (Uppgift 28) ↑





(Uppgift 25)

(Uppgift 29)