

Svar till PROBLEM I KOMBINATORIK 2

Permutationer

1. 325 "ord".
2. 480 "ord". (Svaret kan skrivas

$$480 = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3,$$

där den första termen ger antalet "ord" med två A - de kan ju placeras ut på $\binom{4}{2}$ olika sätt - den andra antalet ord med högst ett A.)

3. 60 "ord".
4. 20 "ord".
5. a) 60. b) Ja, säg det.
6. Det finns 30 tärningar. (Sidan med 1 kan antas peka framåt. Det finns 5 möjligheter att välja motsatt sida. Antag att vi betraktar ett av dessa fall, ex.vis då 2 finns där. Vi kan sedan vrida tärningen så att 3 ligger uppåt. Det blir då olika tärningar när vi placerar ut de återstående 3 talen på de möjliga 3! olika sätten. Totalt fås alltså $5 \cdot 3!$ olika tärningar.)

Kombinationer och blandade problem

7. På $5 \cdot 37 \cdot 61913822061$ sätt (kanske). (Svaret kan skrivas $\binom{52}{32}$, vilket svarar emot att vi först konstaterar på vilka platser i den resulterande bunten med 52 kort, korten i den ena bunten - den med 32 kort - ligger. Därefter kan de i den andra endast placeras ut på ett sätt.)
8. 630 tal. (Ett sätt är att dela upp i fall beroende på var ettan som är direkt följd av tvåan sitter.)
9. På 19.958.400 sätt. (Välj först ut fyra platser och placera ut A,B,C och D på dessa. Detta kan ske på $\binom{12}{4}$ sätt. De resterande åtta platserna kan sedan fyllas på 8! olika sätt. Multiplikationsprincipen ger slutligen svaret.)
10. På 28 sätt. (Detta är ett "urval med repetition"-problem. Korvarna plus två streck kan placeras ut i sammanlagt 8 positioner. Om vi väljer två av dessa och sätter strecken där så har vi gjort ett val och detta kan alltså ske på $\binom{8}{2}$ olika sätt.)
11. På 910 sätt. (De tre brev som kommer fel kan väljas på $\binom{15}{3}$ olika sätt. Sedan ser vi lätt att de tre bara kan komma fel på två olika sätt. Detta problem leder vidare till den ultimata utmaningen för postverket, det berömda *Bernoulli-Euler problemet* om det feladresserade breven: på hur många sätt kan n brev delas ut så att *alla* kommer fel? Svaret visar sig hänga ihop med talet e .)

12. På 123.552 olika sätt. (Svaret kan skrivas

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 44,$$

där de första tre faktorerna ger antalet sätt att välja två par.)

13. På 330 sätt. (Tag först en av varje sort. Vi skall sedan välja sju äpplen av fem sorter. Här har vi ett "oordnat urval med repetition", och svaret blir $\binom{7+5-1}{7}$.)

14. På 183.040 olika sätt. (Svaret kan skrivas

$$\binom{13}{4} \cdot 4^4 \quad \text{eller} \quad 52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot \frac{1}{4!},$$

vilket svarar mot två olika sätt att resonera, vilka?)

Binomialsatsen

15. Ja, och den är

$$\binom{30}{6} \cdot \frac{1}{2^{24}} \cdot 32^6 = \binom{30}{6} \cdot 2^6.$$

(Den allmänna termen i binomialutvecklingen kan skrivas

$$\binom{30}{k} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^{30-k} \cdot \left(\frac{32}{x^8}\right)^k = \alpha_k \cdot x^{60-10k}$$

där α_k är ett tal som beror av k . Den konstanta termen fås nu om $k = 10$ och beräkning av α_{10} ger svaret.)

16. (En mängd M med $3n$ element delas upp i tre delmängder med lika många element. Om vi skall plocka ut tre element ur M så har vi tre möjligheter:

- Alla tre ligger i samma delmängd. Detta svarar mot den första termen.
- Två ligger i samma delmängd men det tredje i en annan. Detta svarar mot andra termen.
- Alla ligger i olika delmängder. Detta ger tredje termen. Svaret följer nu ur additionsprincipen.)

17. (Tillämpa binomialutvecklingen med lämpliga a och b .)

18. Uttrycket kan skrivas 4^n . (Binomialutveckling igen.)

Gunnar