

Ytterligare problem om induktion och kombinatorik

1. Skriv med användning av summasympol och visa sedan med induktion

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

2. Man kastar en tärning fyra gånger.

- a) Hur många kastserier är möjliga?
b) Hur många av dessa innehåller minst en sexa?

3. Visa med induktion

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

4. På hur många sätt kan fem olika brev läggas i tre olika fack så att högst ett fack blir tomt?

5. Visa med induktion

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

6. Ordet SUSSAR skrivs på ett papper som sedan klipps sönder i sex bitar med en bokstav på varje.

- a) Hur många "ord" kan bildas om alla sex bitar läggs i rad?
b) Vad blir svaret på motsvarande fråga om endast fyra av de sex bitarna skall läggas i rad?

7. Visa med induktion

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

8. När man spelar V75 skall man ange vinnande häst i vart och ett av sju lopp. Om man antar att exakt tio hästar startar i varje lopp, hur många V75 rader finns det med

- a) sex rätt, b) minst fem rätt?

9. Hur många niosiffriga tal innehåller exakt en nolla, två ettor och tre tvåor?

10. I en klass med sexton elever skall göras en indelning i åtta par av elever inför ett grupparbete. På hur många sätt kan denna indelning ske?

11. (En utmaning vad beträffar matematiskt handarbete). Visa med induktion

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

12. (En utmaning rörande handhavande av binomialkoefficienter). Visa med induktion

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \cdot \frac{1}{2^k} = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Gunnar