Funktioner

En funktion f är något som för ett tal x associerar (exakt) ett annat tal, som vi ofta betecknar $f(x)$, eller så är f odefinierad för x (och då är $f(x)$ obestämd).

Om detta låter flummigt så är dock funktioner i praktiken oftast ganska konkreta.

Exempel Definiera en funktion f på följande sätt

$$f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Denna funktion är definierad för alla reella x utom $x = 1$.

Mängden av alla tal x för vilken en funktion f är definierad kallas f:s domän och betecknas ibland dom(f).

I föregående exempel har vi

$$\mathrm{dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

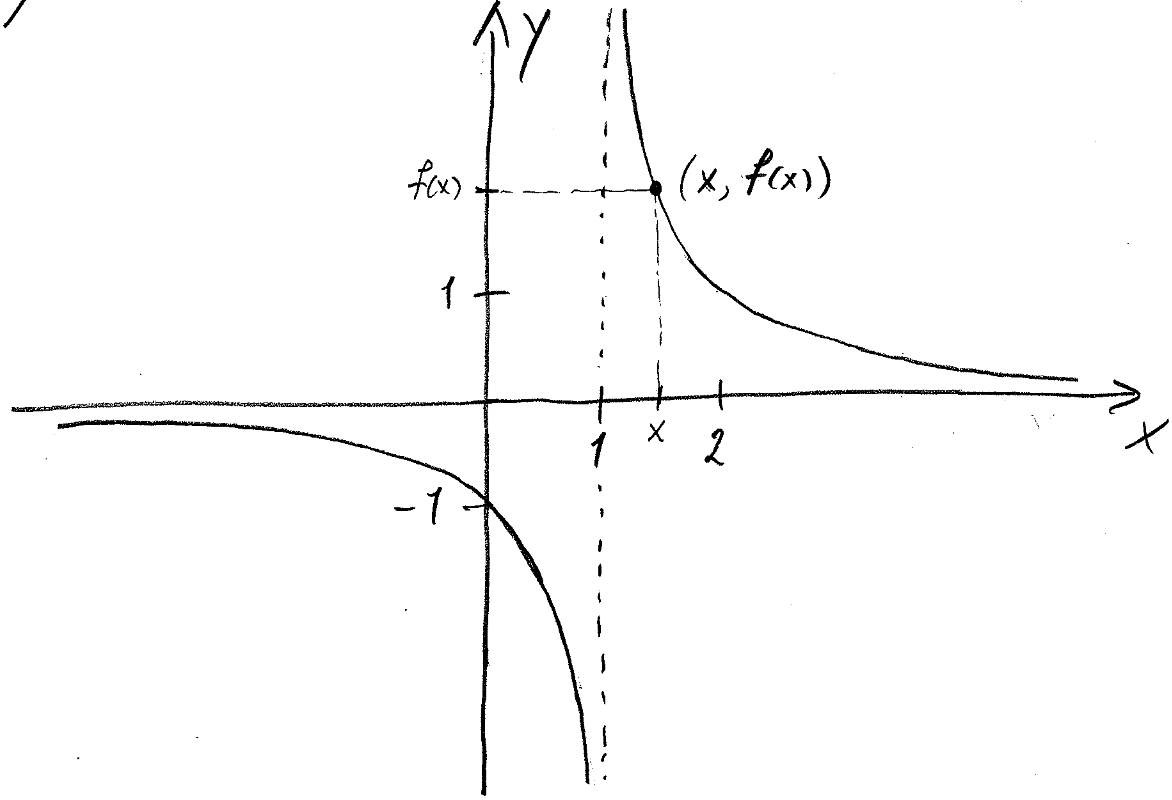
Funktionsgrafer

Om f är en funktion så är dess graf mängden av alla punkter (x, y) i xy-planet sådana att

f är definierad för x
och $y = f(x)$.

Exempel Låt $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Då har grafen till f ungefär följande utseende:



(Grafen består av två "delar," en till vänster och en till höger om linjen $x = 1$.)

Övning

(a) Rita grafen till $f(x) = x^2$

(b) —— " —— $g(x) = x^3$.

Exponentialfunktioner

Låt $a > 0$.

Som bekant har vi

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ gånger}} \quad \text{om } n \text{ är ett positivt heltal.}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} .$$

Låt n vara ett positivt heltal.

Den n:te roten av a, betecknad $\sqrt[n]{a}$ definieras till att vara det tal $b > 0$ som uppfyller att

$$b^n = a$$

$$(\text{så } (\sqrt[n]{a})^n = a).$$

Obs! Det följer att $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Nu kan vi definiera

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$ för (positiva) heltal m och n,

och låt $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Så är a^r (nu) definierat för alla rationella tal r.

Att definiera vad a^x betyder för ett irrationellt (men reellt) tal x kräver mer arbete, och vi går inte igenom detta här. Det görs i Envariabelanalyskursen och det står beskrivet i kursboken 'Calculus' (Kapitel 3.1–3.3).

Följande räkneregler gäller för alla reella x, y, a, b, där $a > 0$, $b > 0$:

Räkneregler

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Räknereglerna är uppenbara om x och y är heltal, och ganska lätta att bevisa om x och y är rationella (men kräver mer arbete om x eller y är irrationella).

Exempel. Antag att $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{m}{n}$ där p, q, m, n är heltal.

$$a^{x+y} = a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}} = a^{\frac{pn+qm}{nq}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{pn+qm}} = \sqrt[nq]{a^{pn} \cdot a^{qm}}$$

$$= \sqrt[nq]{a^{pn}} \cdot \sqrt[nq]{a^{qm}}$$

$$= a^{\frac{pn}{nq}} \cdot a^{\frac{qm}{nq}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^x \cdot a^y.$$

<u>Övning</u> Följande uttryck kan förenklas till ett heltal. Visa detta.

$$\frac{8^2 \cdot \left(\frac{3^4}{6}\right)^3}{27^2}$$

<u>Lösning</u>

$$\frac{8^2 \cdot \left(\frac{3^4}{6}\right)^3}{27^2} = \frac{(2^3)^2 \cdot \left(\frac{3^4}{6}\right)^3}{(3^3)^2}$$

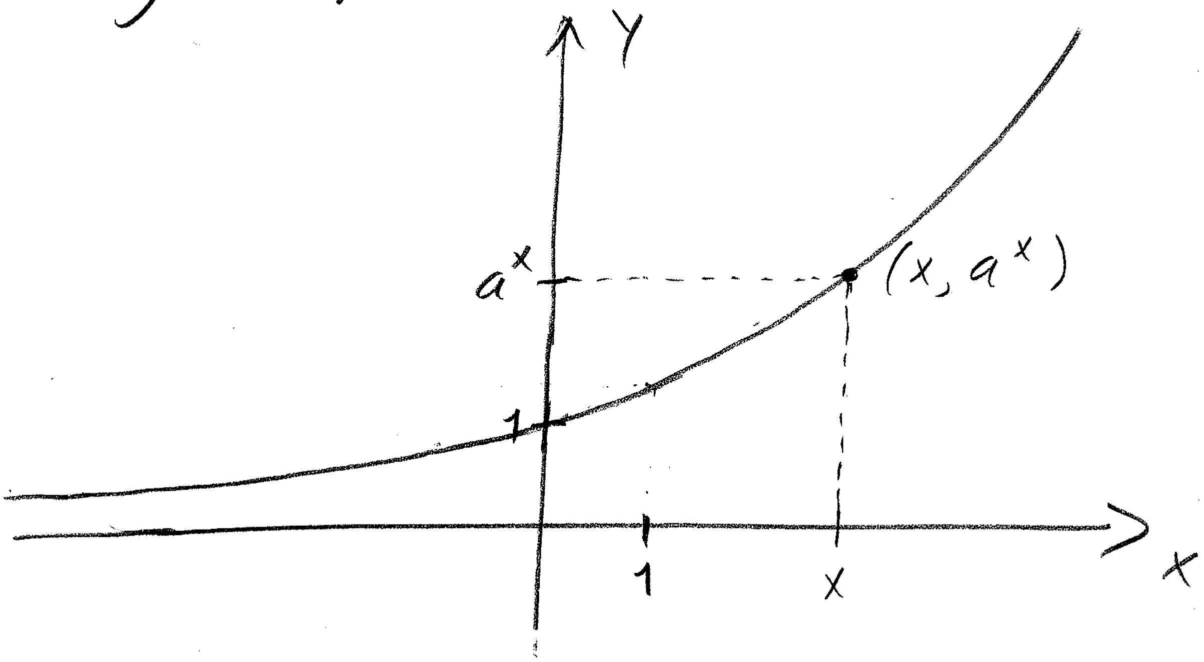
$$= \frac{2^6 \cdot 3^{12}}{3^6 \cdot 6^3} = \frac{2^6 \cdot 3^{12}}{3^6 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = \frac{2^6}{2^3} \cdot \frac{3^{12}}{3^9} =$$

$= 2^3 \cdot 3^3 = 6^3 = 216.$

Exponentialfunktionen a^x har följande egenskap:

Om $x < y$ så $a^x < a^y$.

Grafen till $f(x) = a^x$ har i stora drag följande utseende om $a > 1$:



Notera att $a^x > 0$ för alla x.

Logaritmfunktioner

Logaritmen med bas a (där $a > 0$) betecknas $\log_a$ och definieras så här:

Om $x > 0$ så är $\log_a x$ det tal y som uppfyller att $a^y = x$.

(Om $x \leq 0$ så är inte $\log_a x$ definierad.)

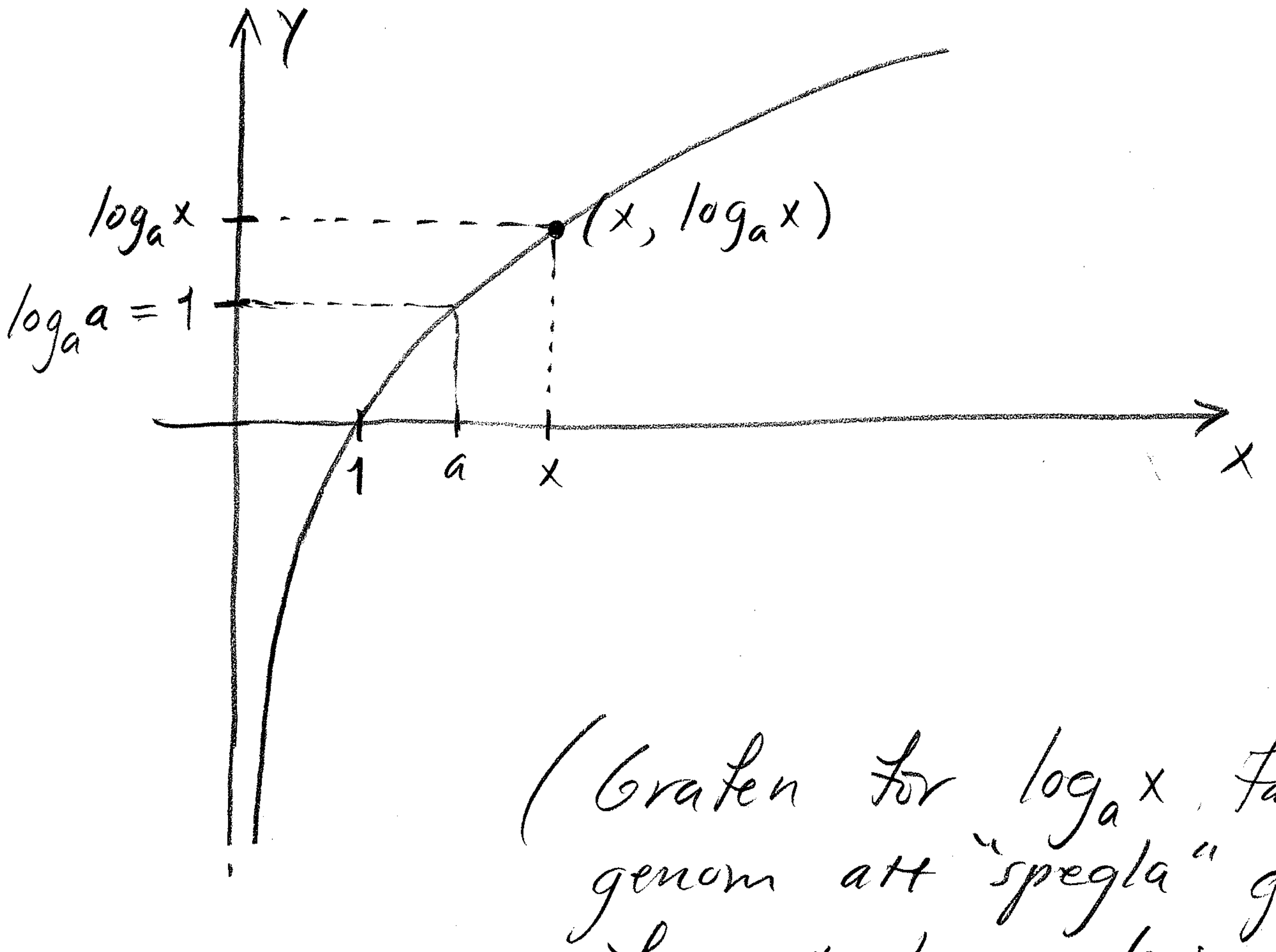
Det följer att

(1) $\log_a(a^x) = x$ för alla reella x,

(2) $a^{\log_a x} = x$ för alla positiva reella x.

Man säger att $\log_a x$ är <u>inversfunktionen</u> till a^x, och omvänt.

Grafen för funktionen $g(x) = \log_a x$ har ungefär följande utseende om $a > 1$:



(Grafen för $\log_a x$ fås genom att "spegla" grafen för a^x kring linjen $y = x$.)

Följande räkneregler är en konsekvens av punkterna (1) och (2) för $\log_a$ samt räknereglerna för a^x:

Räkneregler:

Om $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ och $b \neq 1$ så

$$\log_a 1 = 0 \quad , \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^y) = y \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

<u>Exempel</u> Vi visar att

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Enligt räkneregler för exponentialfunktionerna och (2) så

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}$$

$$= xy.$$

Enligt definitionen av $\log_a$ så måste vi ha $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

<u>Övning</u> Förenkla så långt som möjligt:

(a) $\log_2 32$

(b) $\log_2(10^3) + 3\log_2 7 - \log_2 35$

(c) $4\log_3\sqrt{x} + 6\log_3 x^{\frac{1}{3}}$

(d) $\log_{10}(x^2 + 2x + 4)$

Lösningar

(a) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5\log_2 2$

$= 5 \cdot 1 = 5.$

(b) $\log_2(10^3) + 3\log_2 7 - \log_2 35$

$= \log_2(10^3) + \log_2(7^3) - \log_2 35$

$= \log_2(10^3 \cdot 7^3) - \log_2 35$

$= \log_2(70^3) - \log_2 35$

$= \log_2\left(\frac{70^3}{35}\right) = \log_2(9800)$

(c) $4\log_3\sqrt{x} + 6\log_3 x^{\frac{1}{3}}$

$= 2\log_3 x + 2\log_3 x$

$= 4\log_3 x.$

(d) $\log_{10}(x^2+4x+4)$

$= \log_{10}(x+2)^2 = 2\log_{10}(x+2).$

Ekvationer som involverar exponential- eller logaritm-funktioner:

<u>Exempel</u> Lös ekvationen

$$2^{x^2-3} = 4^x.$$

Lösning. $2^{x^2-3} = 4^x$

$$\Leftrightarrow \log_2(2^{x^2-3}) = \log_2(4^x)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)\log_2 2 = x \log_2 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ eller } x = -1.$$

Övning Lös ekvationen

$$4\log_5 x = -3 + \log_5(2x)$$

Lösning. Ekvationen är ekvivalent med

$$5^{4\log_5 x} = 5^{-3 + \log_5(2x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5^{\log_5 x^4} = 5^{-3} \cdot 5^{\log_5 (2x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 = \frac{2x}{5^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 = \frac{2}{5^3}$$

Vi antar att $x \neq 0$ för annars är inte $\log_5 x$ definierat.

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt[3]{2}}{5}$$

Notation $\ln x$ betyder $\log_e x$ där e är ett speciellt irrationellt tal ($e \approx 2{,}718$) som behandlas mer i Envariabelanalysen.

'ln' kallas för den "naturliga logaritmen".