

①

Kombinatorik

Försöker svara på frågor som

"På hur många sätt kan
göras/väjas?"

"Hur många finns?"

Exempel Studenterna i en klass
får i uppgift att läsa
en bok av författaren F_1 ,

_____ " _____ F_2

och _____ " _____ F_3 .

Antag att F_1 har skrivit 3 böcker,

F_2 _____ " _____ 2 - " -

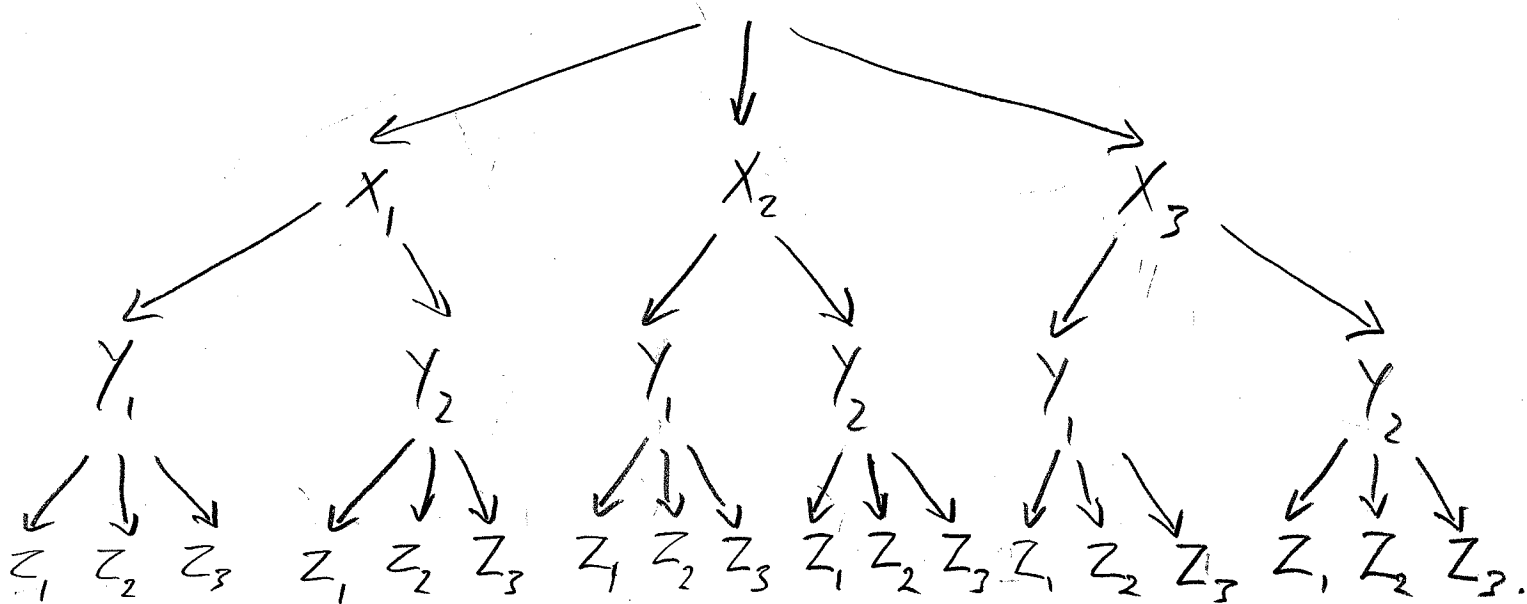
och F_3 _____ " _____ 3 - " -

På hur många sätt kan en student
välja sina 3 böcker?

(2)

Kalla F_1 's böcker för X_1, X_2, X_3
— " — F_2 's — " — Y_1, Y_2
— " — F_3 's — " — Z_1, Z_2, Z_3 .

De möjliga valen av 3 böcker
illustreras av pilarna:



Med ord:

Den första boken kan väljas på
3 sätt. Den andra, oberoende av
det första valet, på 2 sätt, och
den tredje, oberoende av de före-
gående valen, på 3 sätt.

Det blir $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ sätt.

Vi har använt multiplikations-
principen som i allmänhet
kan formuleras så här:

Om

(1) saken S_1 kan göras på n_1 olika sätt,

(2) saken S_2 kan göras på n_2 olika
sätt oberoende av hur S_1 gjordes,

⋮

(k) saken S_k kan göras på n_k olika
sätt oberoende av hur sakerna
 $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$ gjordes,

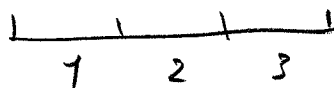
så kan foljden av saker $S_1, S_2, \dots, S_k$
göras på $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ olika sätt.

Exempel

(a) Hur många "ord" av längd 3 kan bildas med hjälp av bokstäverna a, b, c, d, e om varje bokstav får förekomma mer än en gång?

(b) Hur många "ord" av längd 3 kan bildas med hjälp av a, b, c, d, e om varje bokstav får förekomma högst en gång.

Lösning (a) Ett ord av längd 3 har 3 "platser" som skall fyllas med en bokstav



För varje plats har vi 5 val, oberoende av hur vi valde bokstav på de övriga platserna. Alltså kan vi bilda $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$

olika ord av längd 3 med bokstäverna a, b, c, d, e.

⑤

(b) För den första platsen har vi 5 olika val. Den bokstav som valdes får inte förekomma igen så för den andra platsen har vi 4 olika val. För den tredje platsen 3 olika val, så det sökta antalet är $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Resonemang i (b) kan generaliseras och ger då följande sats:

Antalet sätt att välja, i ordnings-
följd, k olika objekt bland n givna (där $k \leq n$) är

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(där $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1$).

⑥

Örning Hur många olika "ord"
kan bildas genom att kasta om
bokstäverna i

(a) FLICKA

(b) UPPSALA

(c) ANTENNEN

Lösning (a) Det sökta antalet mot-
svarar antalet sätt att ordna
bokstäverna från vänster till höger,
vilket är $6!$

(b) Låt oss först skilja på P:na
och A:na.
Antalet ord som kan bildas genom
att kasta om tecknen i

$U P_1 P_2 S A_1 L A_2$

(där P_1, P_2, A_1, A_2 föreställer olika tecken)
är $7!$. Men om nu P_1 och P_2

skall motsvara samma tecken P ⑦
och A_1 och A_2 samma tecken A
så måste vi dela med

"antalet sätt att ordna tecknen
i $P_1 P_2$ gånger antalet sätt att
ordna tecknen i $A_1 A_2$ ", vilket är
 $2! \cdot 2!$ Alltså kan $\frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$ ord bildas
genom att kasta om bokstäverna i UPPSALA.

(c) Observera att ANTENNEN
har längd 8 och att E före-
kommer 2 gånger och N före-
kommer 4 gånger. På liknande
sätt som i (b) så följer att
det sökta antalet är $\frac{8!}{2 \cdot 4!} =$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 840.$$

Terminologi En ordningsföljd av
 k olika objekt från n givna kallas
också för permutation av k objekt
från de n givna objekten.

8

Övning Hur många olika teckenföljder kan genom omkastning av tecknen i

abcd 123

(a) om vi kräver att siffrorna måste hamna i ett "block" dvs i en följd,

(b) om siffrorna inte får hamna i ett block.

Svar (a) $5! \cdot 3!$

(b) $7! - 5! \cdot 3!$