

Mängder och delmängder

9

Ordet mängd syftar på en samling objekt som är specificerade på något sätt.

Exempel (a) Mängden av alla heltal
(b) Mängden av studenter vid Uppsala universitet (vid en given tidpunkt).

Antag att X och Y betecknar två mängder. Om alla objekt (eller "element") som tillhör X också tillhör Y så säger vi att X är en delmängd av Y , vilket betecknas $X \subseteq Y$.

Låt Y vara mängden som består av talen 1, 2, 3, 4, 5 och ingenting annat. I stället för denna beskrivning

med ord så kan man skriva ⑩

$$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Om vi låter $X = \{1, 3, 4\}$

så gäller $X \subseteq Y$, dvs. X är en delmängd av Y .

Om X är en mängd med exakt n olika element så kan vi uttrycka detta med notationen $|X| = n$.

Så om X och Y är som ovan så $|Y| = 5$ och $|X| = 3$.

Kombinationer

(11)

En delmängd (av en given mängd) kallas också för kombination (av element från den givna mängden).

Obs! När vi talar om en mängd så har ordningen av elementen ingen betydelse, så

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

är samma mängd som

$$\{2, 1, 4, 3\}.$$

Problem Från en klass på 30 studenter skall 4 väljas ut för att representera klassen på ett visst evenemang. På hur många olika sätt kan dessa 4 väljas?

Obs! Vi tänker oss dessa 4 (12)
som en grupp, eller delmängd,
eftersom vi inte behöver ställa upp
dem i ett led med en viss
ordningsföljd.

Problemet innebär alltså att
bestämma antalet kombinationer
av 4 element från 30 givna
element.

Vi har lärt oss att antalet
permutationer (dvs. ordningsföljder)
av 4 element från 30 givna
är $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$.

Men eftersom ordningsföljderna
 a, b, c, d och c, d, b, a
(exempelvis) motsvarar samma

mängd $\{a, b, c, d\}$

(13)

så måste vi dividera med antalet sätt att ordna (i följd) 4 olika element, vilket är $4!$.

Antalet kombinationer av 4 (olika) element från 30 givna är alltså

$$\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4!} = \frac{30!}{(30-4)! \cdot 4!}$$

I allmänhet så gäller följande:

Antalet olika delmängder (eller kombinationer) med exakt k element av en mängd med exakt n element är

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!}$$

(Vi läter $0! = 1$ och antar att $0 \leq k \leq n$.)

Talet $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ betecknas

med $\binom{n}{k}$ och uttalas ofta
som "n över k" eller
"n välj k".

Tal på formen $\binom{n}{k}$ kallas för
binomialtal.

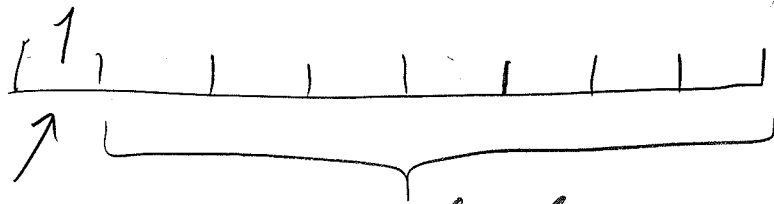
Övning Låt oss kalla en ordningsföljd
av nollor och ettor för ett binärt tal
om följden inte börjar på en nolla eller
består endast av en nolla.

- (a) Hur många binära tal finns
det som består av 8 siffror?
- (b) Hur många binära tal finns
det som består av 8 siffror
varav exakt 4 ettor?

Svar: (a) 2^7 , för den första siffran måste vara en etta.

(15)

$$(b) \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$



Första
siffran
måste vara
en etta

Bland de återstående
7 placeringarna väljer
vi ut 3 stycken där
vi placerar de åter-
stående ettorna.

Övning En lärare har tre listor
med problem från tre olika studie-
områden. Varje lista har 10 uppgifter
och en skrivning skall innehålla
2 uppgifter från varje lista.

Hur många skrivningar kan
läraren åstadkomma. (Ordningen på
uppgifterna saknar betydelse.)

Svar: $\binom{10}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{10}{2}$

(16)

$$= \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 45^3.$$

Observera följande:

Eftersom $n - (n - k) = k$ så

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}.$$

Exempelvis har vi

$$\binom{12}{9} = \binom{12}{3} \quad (\text{eftersom } 9+3=12).$$

Vi definierar också $0! = 1$

vilket medför att

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$

$$\text{och } \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = 1.$$

(17)

Detta är rimligt även under tolkningen att $\binom{n}{k}$ betecknar antalet delmängder med k element från n givna, för

det finns bara ett sätt att välja 0 element från n givna.

(Vi "tackar nej" till alla elementen.)

Och det finns bara ett sätt att välja n element från n givna.

(Vi "tackar ja" till alla elementen.)

(18)

Övning Fyra ungdomar har
köpat ett paket med 12 cigaretter.
På hur många olika sätt kan
de dela på cigaretterna sinsemellan?
(Cigaretterna är identiska så
bara antalet som var och en
får är väsentligt.)

Lösning. Kalla ungdomarna
A, B, C, D. Varje uppdelning
av cigaretter representeras av
en följd som innehåller 12
ettor och 3 nollor.

Exempelvis tolkas följden

1110111101110111
└─┘ └─┘ └─┘ └─┘
A:s B:s C:s D:s
cigaretter

som att A, B, C, D fått

3, 4, 3 respektive 2 cigaretter.

Antalet uppdelningar motsvarar alltså antalet sätt att välja 3 placeringar av $12 + 3 = 15$ möjliga för nollorna. Detta

$$\text{antal är } \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!}.$$

Övning På hur många sätt kan 10 skrivas som en summa av 3 icke-negativa heltal?

(Här betraktar vi exempelvis

$2 + 5 + 3$ och $5 + 2 + 3$ som olika sätt.)

Svar. $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66,$

enligt liknande resonemang som i föregående övning.

Övning Visa att en mängd med n element har 2^n delmängder.
Visa också att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\left(\text{där } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \right).$$

Övning Använd binomialtal
för att beskriva antalet "ord"
som kan läsas genom att
omordna bokstäverna i
ANTENNEN

Svar:

$$\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 840.$$