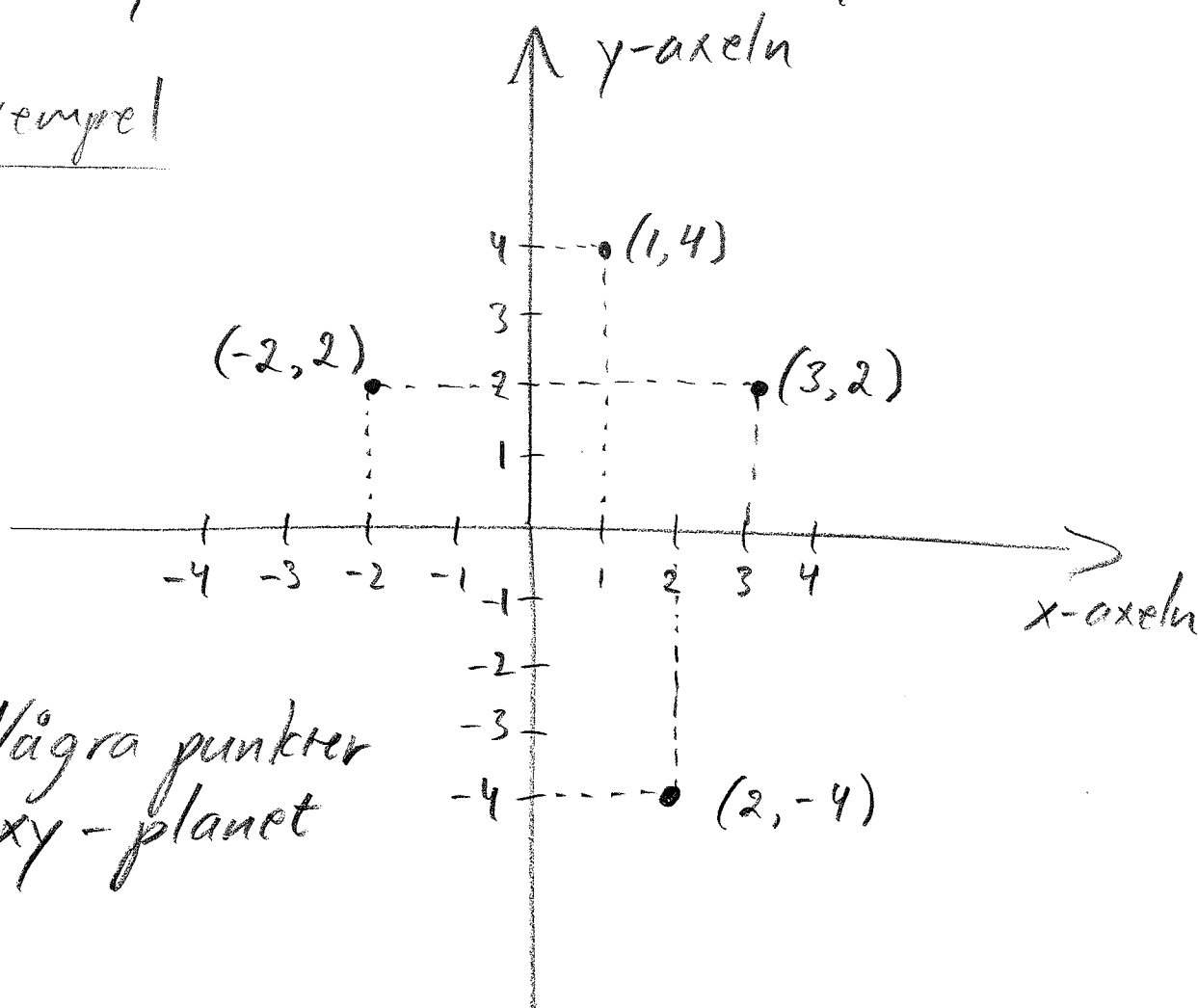


Koordinatsystem i planet (103)

Vi kommer att syssla med olika sorters kurvor i xy -planet.

Punkter i planet beskrivs som (x, y) där x är punktens s.k. x -koordinat och y punktens s.k. y -koordinat. (x och y är reella tal)

Exempel



Några punkter
i xy -planet

Vi säger att en ekvation beskriver en kurva om kurvan består precis av de punkter (x, y) där x och y uppfyller (eller "löser") ekvationen.

Exempel Linjen som är parallell med y -axeln och skär x -axeln i punkten $(2, 0)$ beskrivs av ekvationen $x = 2$.

(Pns. (x, y) ligger på denna linje $\Leftrightarrow x = 2$.)

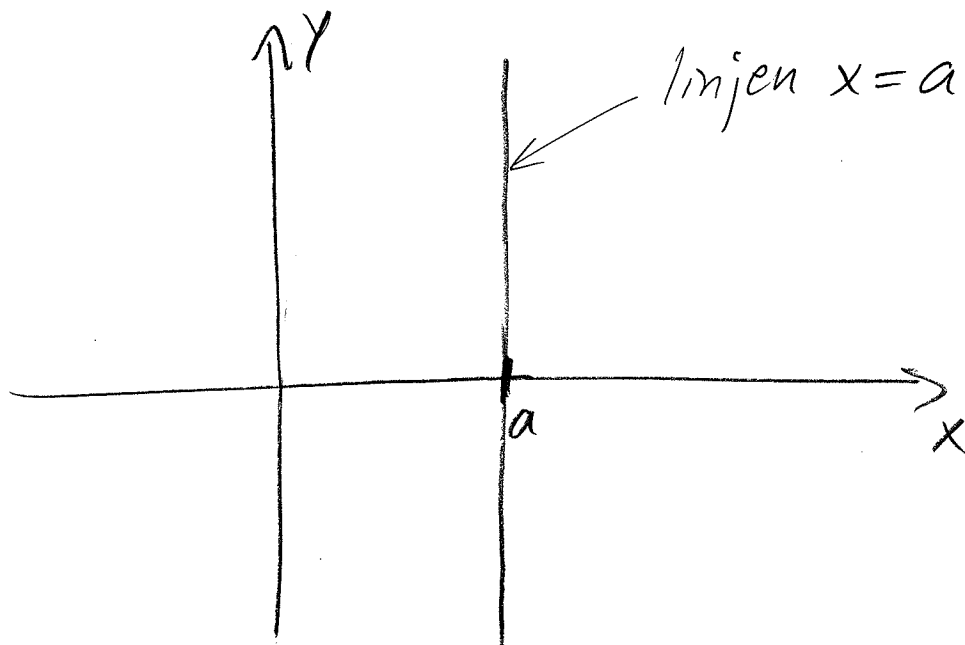
Exempel En cirkel runt punkten $(0, 0)$ med radien 1 beskrivs av ekvationen $x^2 + y^2 = 1$.
(Mer om detta senare.)

Linjer

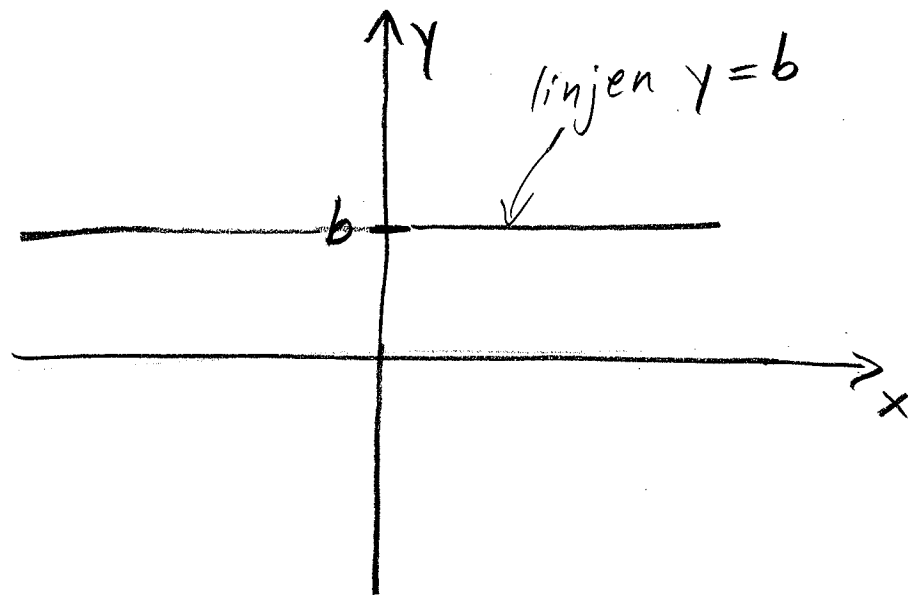
(105)

Two special cases:

- En lodrät/vertikal linje beskrivs av ekvationen $x = a$, där a är punkten på x -axeln där linjen skär x -axeln.



- En vågrät/horizontell linje beskrivs av ekvationen $y = b$ där b är punkten på y -axeln där linjen skär y -axeln.



106

Lutning

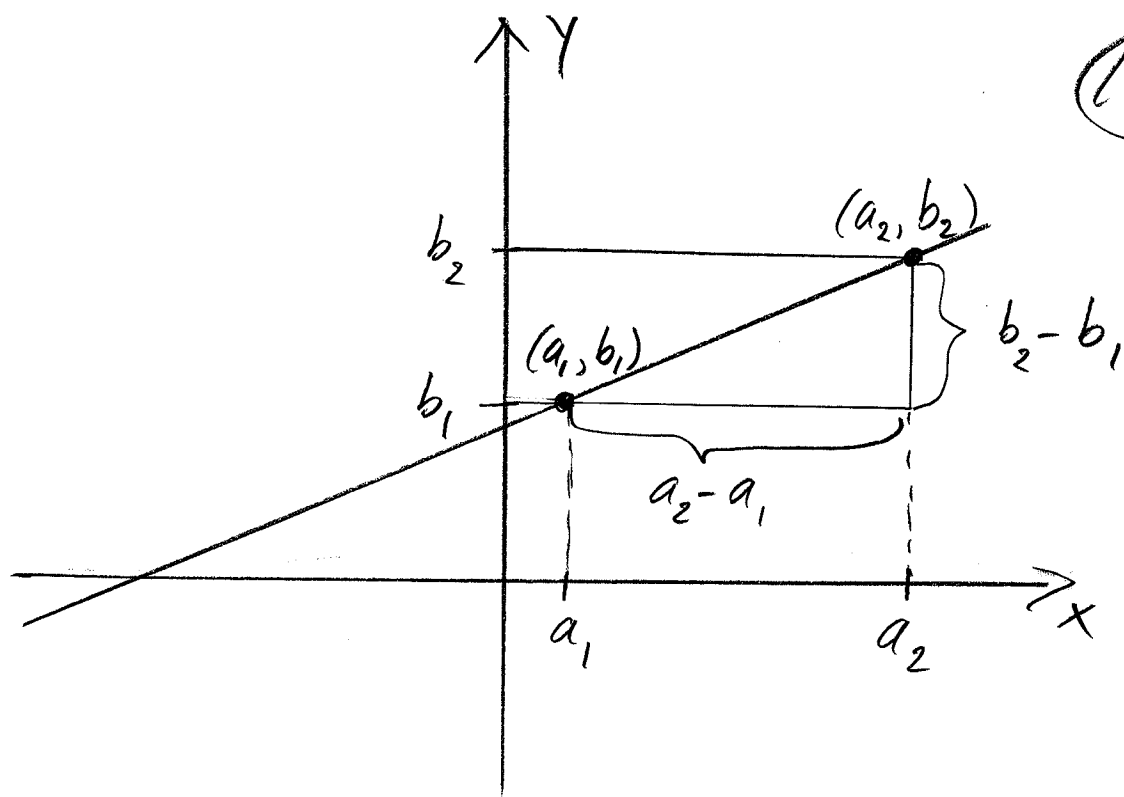
Varje linje som inte är vertikal har en lutning k , där k beräknas enligt

$$k = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$

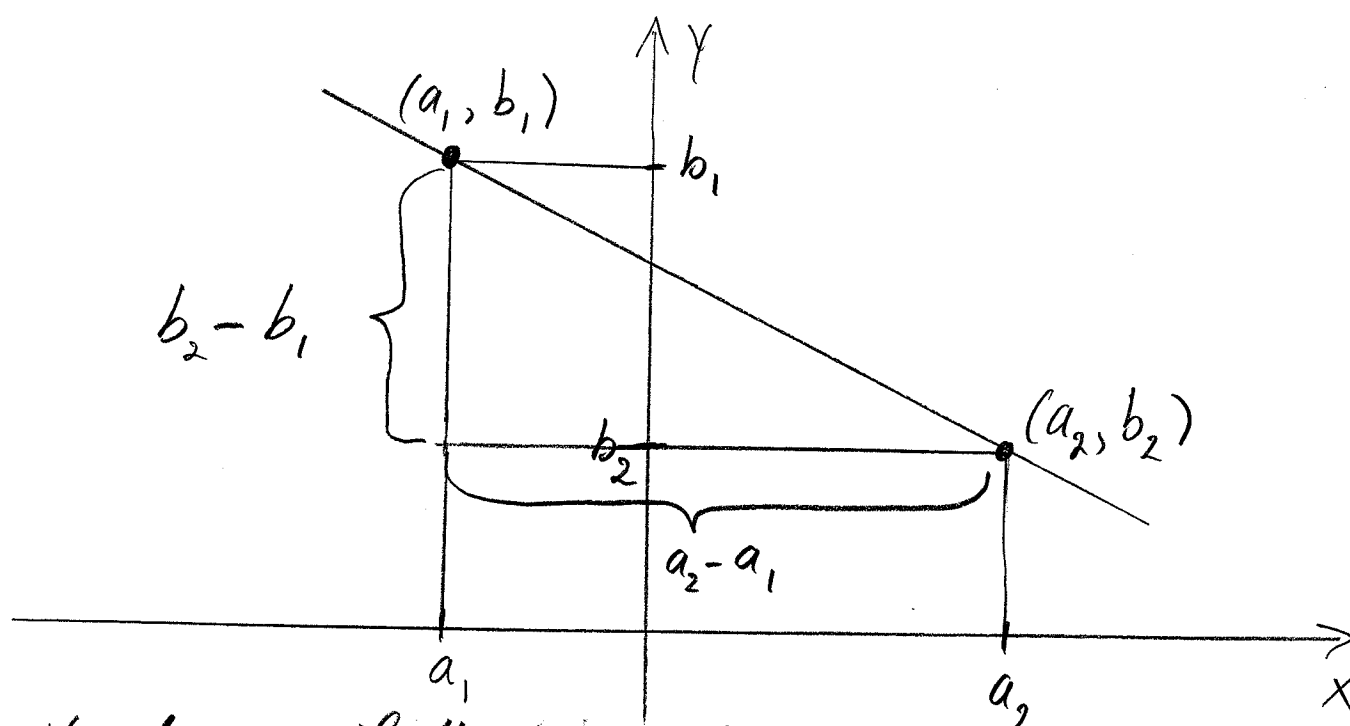
där (a_1, b_1) och (a_2, b_2) är olika punkter på linjen.

(Se figur på nästa sida.)

107



Lutningen $= \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ är positiv i
ovanstående fall.



I detta fall är lutningen negativ
eftersom $b_2 - b_1 < 0$.

Linjens ekvation

Om en linje har lutningen k och skär y -axeln där $y=b$, så beskrivs linjen av

$$y = kx + b.$$

Örning Antag att en linje har lutningen 3 och skär y -axeln där $y = -5$. Beskriv linjens ekvation.

(Svar: $y = 3x - 5$)

Obs! Om vi vet en linjes lutning och en punkt på linjen så kan vi alltid finna dess ekvation. Ett exempel för illustrera detta.

Exempel Antag att en linje har lutningen 4 och passerar genom punkten $(-1, 2)$. Beskriv dess ekvation.

Lösning Vi vet att linjens eku. har formen $y = 4x + b$.
Eftersom $(-1, 2)$ ligger på linjen så löser $x = -1, y = 2$ ekvationen, dvs.

$$2 = 4(-1) + b$$

$$\Leftrightarrow 6 = b$$

Så linjens ekvation är

$$y = 4x + 6.$$

(Och dessutom vet vi att linjen skär y -axeln där $y = 6$.)

Vi kan också finna en linjes ekvation om vi får veta två (olika) punkter på linjen. Vi illustrerar med ett exempel.

Exempel Antag att en linje passerar igenom punkterna $(-2, 9)$ och $(3, -1)$. Bestäm dess ekvation.

Lösning

$$\text{Lutningen är } k = \frac{-1 - 9}{3 - (-2)} = \frac{-10}{5} = -2$$

Så linjens ekvation har formen

$$y = -2x + b$$

där b skall bestämmas.

(111)

Eftersom $(-2, 9)$ ligger
på linjen så gäller

$$-9 = -2(-2) + b$$

$$\Leftrightarrow b = 5$$

Så linjens ekvation är

$$y = -2x + 5.$$

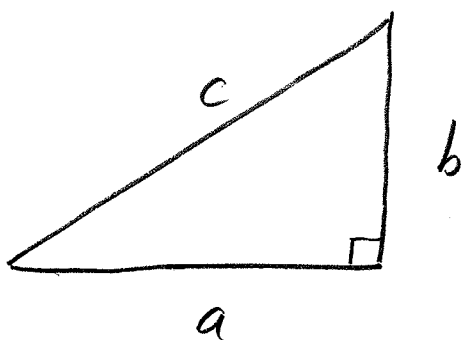
Övning Ange ekvationen för
linjen som passerar igenom
 $(-7, -5)$ och $(2, 1)$.

$$(\text{Svar: } y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3})$$

Pythagoras sats

(112)

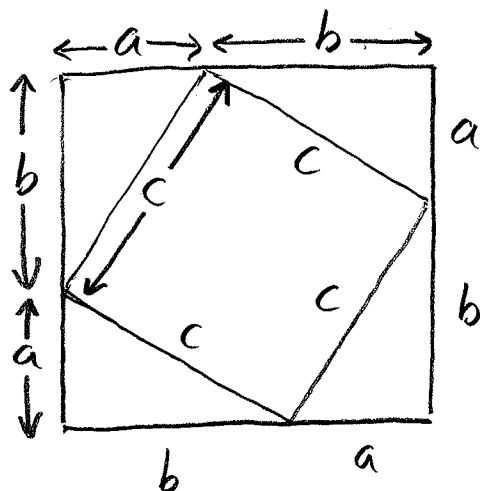
Låt a , b och c vara sidornas
längd i den rätvinkliga
triangeln

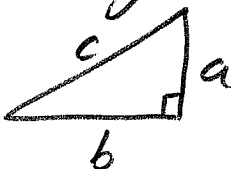


Pythagoras sats Då gäller att
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beris En kvadrat med sidan $a+b$
kan byggas upp av rätvinkliga
trianglar och en kvadrat med
sidan c enligt figuren på
nästa sida.

(113)



Den stora kvadratsens area A är lika med den lilla kvadrats area (som är c^2) plus fyra gånger arean av triangeln .

Den stora kvadratsens area A är också lika med $(a+b)^2$.

Detta ger

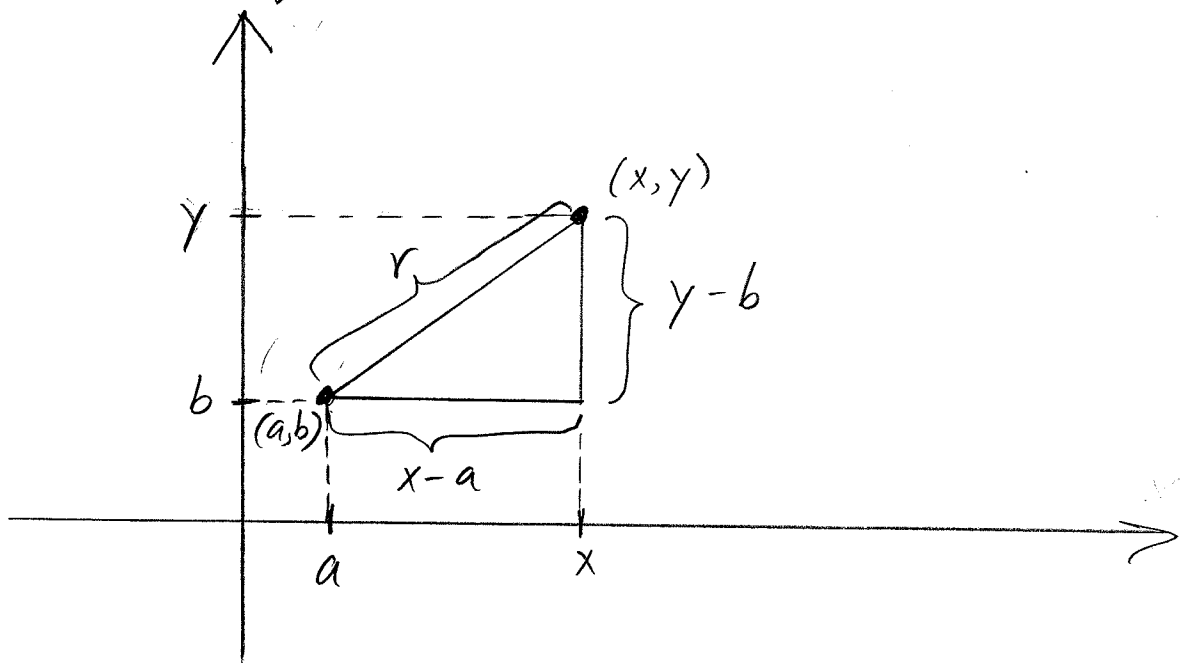
$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = A = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{vilket skulle bevisas.}$$

Avstånd i planet

114

Betrakta två punkter (x, y) och (a, b) i planet.



Låt r vara avståndet mellan (x, y) och (a, b) . Enligt Pythagoras sats så gäller

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\text{så } r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Detta är den s.k. "avstånds-Formeln."

Obs! Vi har

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ &= \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} . \end{aligned}$$

Övning Beräkna avståndet
mellan $(-2, -4)$ och $(3, -1)$

Lösning Avståndet är

$$\begin{aligned} &\sqrt{(-2-3)^2 + (-4-(-1))^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

Cirklar

116

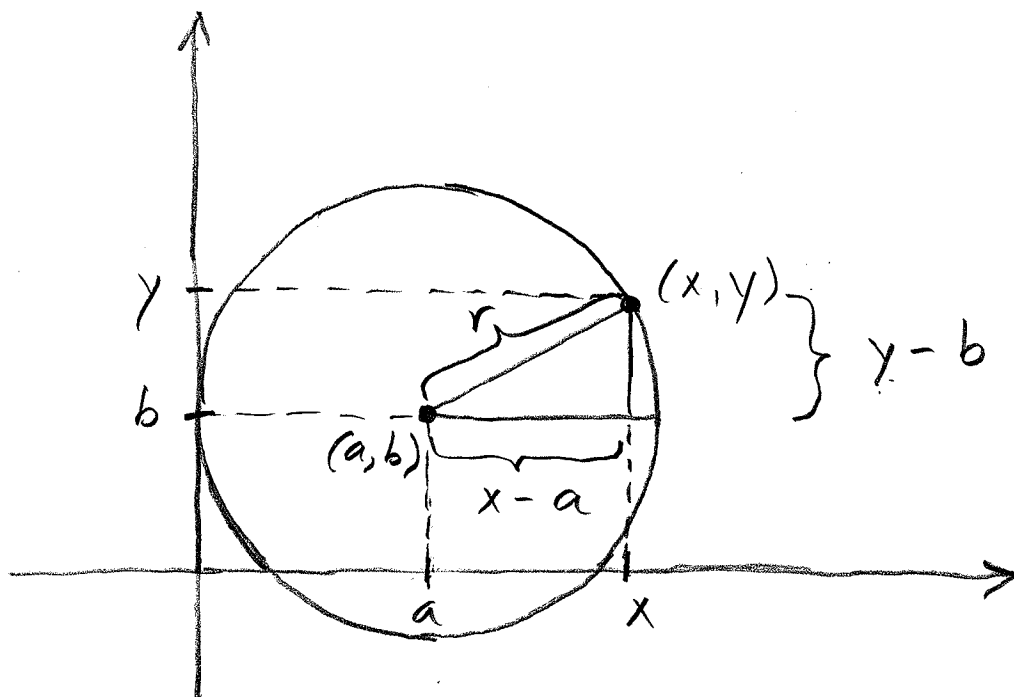
Betrakta en cirkel med radien r och centrum i (a, b) .

En punkt (x, y) ligger på denna cirkel

$\Leftrightarrow$ avståndet mellan (x, y) och (a, b) är r

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$



Det följer att en cirkel med radie r och centrum i (a, b) beskrivs av ekvationen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Övningar

(a) Ange radie och centrum för cirkeln som beskrivs av

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

(b) Samma uppgift för

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

(c) Ange en ekvation som beskriver cirkeln med radie 5 och centrum i $(3, -1)$.

Svar: (a) radien = 3

centrum i $(-2, 3)$

(b) radien = 1

centrum i $(2, 0)$.

(c) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Övning Visa att följande
ekvation beskriver en cirkel
och ange dess radie och
centrum.

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y = 3$$

(Lösning på nästa sida.)

Lösning Vi använder s.k.

"kvadratkomplettering":

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y = 3$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x) + (y^2 + 6y) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Ekvationen beskriver alltså en cirkel med radien 4 och centrum i $(-2, -3)$.

Övn. Ange ekv. för en cirkel
som passerar genom $(2, -3)$
och har sitt centrum i $(-4, -1)$.

Lösning Eftersom $(2, -3)$
ligger på cirkeln och $(-4, -1)$ är
dess centrum så är dess radie

$$\begin{aligned} r &= \text{avståndet från } (-4, -1) \text{ till } (2, -3) \\ &= \sqrt{(-4-2)^2 + (-1-(-3))^2} \\ &= \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \end{aligned}$$

Så cirkelns ekv. är

$$(x+4)^2 + (y+1)^2 = 40$$