

Att lösa 2:a-gradekvationer med komplexa koefficienter

En metod finns för att lösa
ekvationer

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0$$

där α och β får vara vilka
komplexa tal som helst.

Ett exempel illustrerar metoden.

Vi löser

$$2z^2 + (4 - 8i)z + 4 - 32i = 0.$$

Dela först med 2 så att
koefficienten framför z^2 blir ett:

$$z^2 + (2 - 4i)z + 2 - 16i = 0$$

Kvadratkomplettera, så att

(86)

z bara förekommer
på en plats, i ett uttryck
med formen $(z - \gamma)^2$.
Vi får

$$(z + 1 - 2i)^2 - (1 - 2i)^2 + 2 - 16i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + 1 - 2i)^2 = (1 - 2i)^2 - 2 + 16i$$

$$\Leftrightarrow (z + 1 - 2i)^2 = -5 + 12i$$

Nu antar vi $w = z + 1 - 2i$
(så $z = w - 1 + 2i$) och löser först

$$w^2 = -5 + 12i.$$

Vi sätter nu $w = a + bi$ och får

$$(a + bi)^2 = -5 + 12i$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = -5 + 12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

← detta innebär att
 $a \neq 0$ och $b \neq 0$.

Den undre ekvationen ger

$$b = \frac{6}{a}$$

och insättning i den övre ger

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = -5$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 5a^2 - 36 = 0$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow a^2 &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 36} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{13}{2}\end{aligned}$$

Eftersom a^2 inte kan vara negativt

$$\text{så } a^2 = -\frac{5}{2} + \frac{13}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

och $a = \pm 2$.

Fallet $a = 2$ ger $b = \frac{6}{a} = 3$.

Fallet $a = -2$ ger $b = \frac{6}{a} = -3$.

Ekvationen $w^2 = -5 + 12i$
har alltså lösningarna

$$w_1 = 2 + 3i$$

$$w_2 = -2 - 3i$$

Eftersom $z = w - 1 + 2i$ så ges
lösningarna till den ursprungliga
ekvationen av

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 3i - 1 + 2i \\ &= 1 + 5i \quad \text{och} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -2 - 3i - 1 + 2i \\ &= -3 - i. \end{aligned}$$

Rötter och Faktorisering

Ett polynom vars koefficienter är reella kallas reellt (polynom).

Om inget annat sägs så tilläts koefficienterna vara godtyckliga komplexa tal.

Faktorsatsen Låt $p(x)$ vara ett polynom och α ett komplext tal (som förstås kan vara reellt). Då gäller:

α är en rot till $p(x) = 0$ (dvs. $p(\alpha) = 0$)

$\iff (x - \alpha)$ är en faktor till $p(x)$.

Exempel Man kan genom uträkning se att 2 är en rot till

$$x^3 - 7x^2 + 11x - 2 = 0.$$

Då följer att $x - 2$ är en faktor till $x^3 - 7x^2 + 11x - 2$. Genom polynomdivision så finner man en annan faktor.

Algebrans fundamentalsats

För varje polynom $p(x)$ med grad minst 1, så har $p(x) = 0$ en rot bland de komplexa talen.

Följsats För varje polynom

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ med grad minst 1 så finns komplexa tal $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

så att

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n).$$

Induktionsbevis Satsen är sann

för $n=1$ (där n är polynomets grad), eftersom

$$a_0 + a_1x = a_1\left(x - \left(-\frac{a_0}{a_1}\right)\right).$$

(Detta var basfallet.)

(91)

Induktionsregel: Antag att
($n > 1$ och att
Satsen är sann för polynom
med grad $< n$. Enligt
algebras fundamentalsats
så finns en rot α_n till $p(x) = 0$,
och då är $x - \alpha_n$ en faktor
till $p(x)$, dvs. det finns
 $q(x)$ så att $p(x) = (x - \alpha_n)q(x)$,
och då måste $q(x)$ ha grad
 $n-1$. Enligt induktionsantagandet
så finns $a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ så
att $q(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})$.

Detta ger att
$$p(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

och om man tunderar lite inser
man att $a = a_n$. Vi har nu
visat att satsen gäller även för n .
Resten följer från induktionsaxiomet.

Anmärkningar Antag att

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$= a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Då finns varje rot till $p(x) = 0$ med bland talen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ och dessa är entydigt bestämda bortsett från ordningen. Om ett tal förekommer m gånger i följd $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ säger vi att talet är en rot till $p(x) = 0$ med multiplicitet m .

Exempel Vi har $x^3 - 3x - 2 =$

$$(x + 1)(x + 1)(x - 2) =$$

$$(x - (-1))(x - (-1))(x - 2),$$

Så -1 är en rot (till $x^3 - 3x - 2 = 0$) med multiplicitet 2, eller en "dubbelrot", och 2 är en "enkelrot" (dvs. har multiplicitet 1).

Mer om komplexa konjugat

För konjugering har vi följande räkneregler. (Kom ihåg att om $z = a + bi$ så $\bar{z} = a - bi$.)

$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

Beris av andra regeln.

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)} \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) i = \end{aligned}$$

$$= a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i$$

(94)

$$= \overline{(a_1 + b_1 i)} + \overline{(a_2 + b_2 i)}$$

$$= \bar{z} + \bar{w}.$$

Övning Bevisa de övriga konjugeringsreglerna.

Notera att om α är reellt så $\bar{\alpha} = \alpha$.

Från detta och konjugeringsreglerna så följer att om $p(x)$ är ett reellt polynom och z ett komplext tal så $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$.

(Detta eftersom polynom är uppbyggda av endast heltalspotenser, multiplikation, addition och subtraktion.)

(95)

Sats Om $p(x)$ är ett reellt polynom och $a+bi$ (där a, b är reella) är en rot till $p(x)=0$, så är även $a-bi$ en rot till $p(x)=0$.

Bevis Antag att $\alpha = a+bi$ och $p(\alpha) = 0$. Då gäller också

$p(\bar{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0$, så $\bar{\alpha} = a-bi$ är också en rot.

Övning Talet i är en rot till

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0.$$

Bestäm alla rötter och skriv

$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$ som en produkt av första gradsfaktorer.

Lösning. Om i är en rot så är också $-i$ en rot (eftersom polynomet har reella koefficienter).

Då kan $p(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$ skrivas som

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+i)(x-i)q(x) \\ &= (x^2+1)q(x) \end{aligned}$$

för något polynom $q(x)$.

Vi finner $q(x)$ genom att dela $p(x)$ med x^2+1 .

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & \begin{array}{r} x^2 - x - 6 \\ x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 \\ \underline{x^4 \qquad + x^2} \\ -x^3 - 6x^2 - x - 6 \\ \underline{-x^3 \qquad - x} \\ -6x^2 - 6 \\ \underline{-6x^2 - 6} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

(97)

Så $q(x) = x^2 - x - 6$ och

$$p(x) = (x+i)(x-i)(x^2 - x - 6).$$

De återstående rötterna till $p(x)=0$ måste vara rötter till

$$x^2 - x - 6 = 0$$

vilka ges av

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Rötterna till $p(x)=0$ är alltså

$$i, -i, 3, -2 \text{ och}$$

$$p(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$$

$$= (x+i)(x-i)(x-3)(x+2).$$

Definition Ett reellt polynom $p(x)$ kallas för reellt irreducibelt om $p(x)$ ^(antingen) har grad 1 eller har grad 2 och saknar reella rötter. (Så alla reella förstegradspolynom är reellt irreducibla.)

Övning Skriv

$$p(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$$

som en produkt av reella irreducibla faktorer.

Lösning Notera att $p(x)$ är samma polynom som i föregående uppgift, så vi får

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+i)(x-i)(x-3)(x+2) \\ &= (x^2+1)(x-3)(x+2), \end{aligned}$$

där faktorena är reellt irreducibla.

Övning En polynomekvation

$p(x) = 0$ uppfyller följande villkor:

(a) $p(x)$ är reellt.

(b) $1+i$ och $2+i$ är rötter till $p(x) = 0$.

(c) $p(x)$ har minsta möjliga gradtal.

(d) Koefficienten för termen med högst grad är 1.

Hur ser $p(x)$ ut?

Lösning. Pga. (a) och (b) så

är $1+i, 1-i, 2+i, 2-i$ rötter

och $p(x) =$

$$= (x - (1+i))(x - (1-i))(x - (2+i))(x - (2-i)) q(x)$$

$$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 4x + 5) q(x).$$

Pga. (c) så måste $q(x)$ ha grad 0, dvs. vara en konstant, så $q(x) = c$,

och pga. (d) så måste $c = 1$, så

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 4x + 5)$$

$$= x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10.$$