Intervall

Låt a, b vara reella tal sådana att $a < b$.

Det <u>öppna intervallet</u> från a till b består av alla reella tal x som uppfyller $a < x < b$.

Detta intervall betecknas med (a, b).

Det <u>slutna intervallet</u> från a till b betecknas $[a, b]$ och består av alla reella x som uppfyller

$$a \leq x \leq b$$

(så a och b tillhör $[a, b]$).

Vi har också följande intervall:

$[a, b)$: alla reella x som uppfyller $a \leq x < b$.

$(a, b]$: alla reella x som uppfyller $a < x \leq b$.

(a, ∞) : alla reella x som uppfyller $a < x$

$[a, \infty)$: alla reella x som uppfyller $a \leq x$

$(-\infty, b)$: gissa själv.

$(-\infty, b]$: gissa själv.

Olikheter

"Olikheter" är som ekvationer, men involverar '<' eller '≤' i stället för '='.

Några räkneregler:

- Om $a<b$ så $a+c<b+c$
- Om $a<b$ så $a-c<b-c$
- Om $a<b$ och $c>0$ så $ac<bc$
- Om $a<b$ och $c<0$ så $ac>bc$.
- Om $a<b$ så $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Samma saker gäller om vi byter ut '<' mot '≤'.

Exempel Beskriv mängden av x som uppfyller $(x-2)(x+3)>0$.

Vi har $(x-2)(x+3) > 0$ om båda faktorerna är positiva *eller* om båda faktorerna är negativa. Vi kan ta reda på när detta inträffar med hjälp av en *teckentabell*.

		-3		2		x
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x+3)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$(x-2)(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

På tal-linjen har jag "märkt" de punkter där någon av faktorerna blir noll. '+' betyder 'positiv' och '−' betyder 'negativ'. Från den understa raden ser vi att $(x-2)(x+3) > 0$ om $x < -3$ eller om $x > 2$ (men ingen annanstans på tal-linjen). Vi kan uttrycka detta såhär:

$$(x-2)(x+3) > 0 \iff x < -3 \text{ eller } x > 2 .$$

('$\iff$' uttrycker att högerledet är sant om vänsterledet är sant, och omvänt.)

Alternativt så kan lösningen uttryckas med hjälp av intervall

$$(x-2)(x+3) > 0$$

$\iff$ x tillhör $(2, \infty)$ eller $(-\infty, -3)$

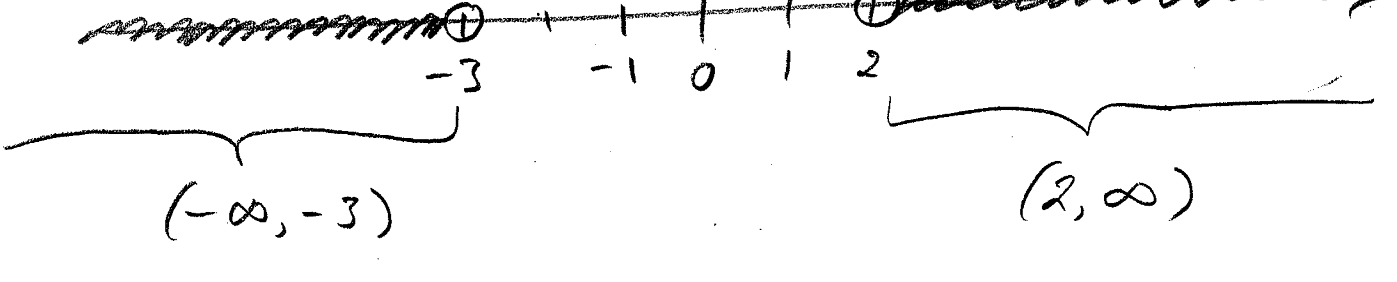
(alternativt)

$\iff$ x tillhör $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$

se förklaring

Om A och B är mängder så betecknar $A \cup B$, uttalat "A union B" mängden av alla element som tillhör A eller B.

På tallinjen ser $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$ ut så här:



Exempel Beskriv mängden av x som uppfyller $x^2 \leq 1$.

Lösning: $x^2 \leq 1 \iff x^2 - 1 \leq 0$

$\iff (x+1)(x-1) \leq 0$.

Vi använder nu teckentabell.

x		-1		1	
$(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Teckentabellen visar att

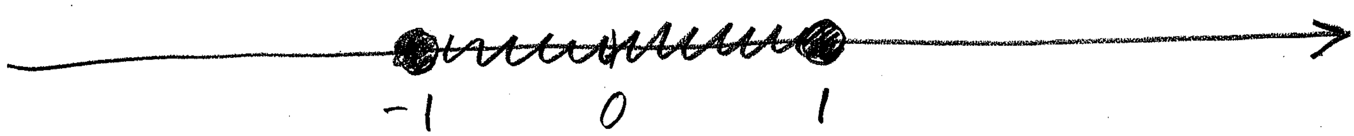
$(x+1)(x-1) \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 1$.

Det följer att $x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$.

Alternativt kan detta uttryckas som

$x^2 \leq 1 \iff x$ tillhör $[-1, 1]$.

På tal-linjen ser $[-1, 1]$ ut så här:



Absolutbelopp

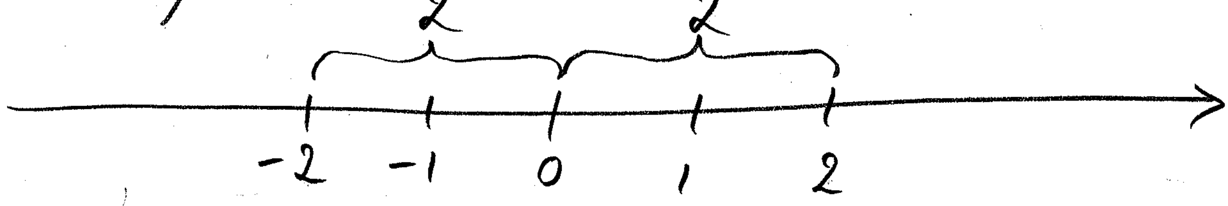
Låt a vara ett reellt tal.

<u>Absolutbeloppet</u> av a, betecknat $|a|$ definieras så här

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om } a \geq 0 \\ -a & \text{om } a < 0 \end{cases}.$$

Eftersom $-a$ är positivt om $a < 0$ så gäller alltid $|a| \geq 0$ (och $|a| = 0 \iff a = 0$).

Absolutbeloppet $|a|$ motsvarar avståndet från a till 0 på tallinjen.



$|2| = 2$, för avståndet till 0 är 2.

$|-2| = 2$, för avståndet till 0 är också 2.

Räkneregler

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
4. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ (triangelolikheten).
5. $|a| = b \iff a = b$ eller $a = -b$
6. $|a| < b \iff -b < a < b$
7. $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$.
8. $|a| > b \iff a > b$ eller $a < -b$.
9. $|a| \geq b \iff a \geq b$ eller $a \leq -b$

För att förstå räknereglerna, så tänk på $|a|$ som avståndet från a till 0 på tallinjen.

<u>Exempel</u> Lös olikheterna

(a) $|4x-2| \leq 4$

(b) $|4x-2| < 4x$

(dvs. beskriv mängden av x som uppfyller respektive olikhet.)

<u>Lösning:</u> (a)

Med räkneregel 7 får vi

$$|4x-2| \leq 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad -4 \leq 4x-2 \leq 4$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x-2 \leq 4 \\ -4 \leq 4x-2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$\Longleftrightarrow$ x tillhör $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

(b) Med räkneregel 6 får vi

$$|4x-2| < 4x$$

$$\Longleftrightarrow \quad -4x < 4x-2 < 4x$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -4x < 4x-2 \\ 4x-2 < 4x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < x \\ -2 < 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x > \tfrac{1}{4} \Longleftrightarrow x \text{ tillhör } (\tfrac{1}{4}, \infty).$$

<u>Övning</u> Visa att $|x+1| < x$ saknar lösningar.

<u>Lösning</u> Om x vore en lösning så skulle x uppfylla $-x < x+1 < x$ vilket skulle medföra att $x+1 < x$ och $1 < 0$, och detta motsäger grundantagandet att $0 < 1$.

<u>Övning</u> Lös olikheten

$$|(x-2)(x+3)| > 0.$$

<u>Lösning</u>: Om $|(x-2)(x+3)| \not> 0$ så $|(x-2)(x+3)| = 0$ vilket medför att $(x-2)(x+3) = 0$ och vi får $x=2$ eller $x=-3$. Så alla tal x utom 2 och -3 uppfyller olikheten $|(x-2)(x+3)| > 0$.

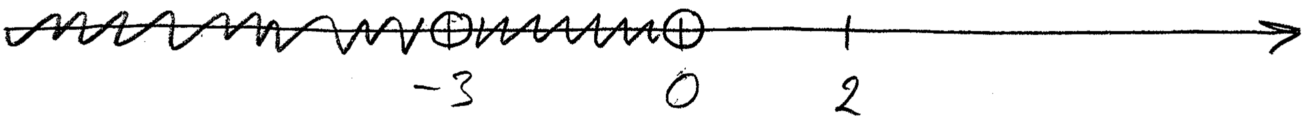
Övning Lös olikheten
$$(x-2)|x+3| < 0.$$

Lösning: Teckentabell:

x		-3		2	
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\lvert x+3\rvert$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)\lvert x+3\rvert$	$-$	0	$-$	0	$+$

Från nedersta raden ser vi att
$$(x-2)|x+3| < 0$$
$$\iff x < -3 \text{ eller } -3 < x < 0$$
$$\iff x \text{ tillhör } (-\infty, -3) \cup (-3, 0).$$

På tal-linjen ser mängden av lösningar ut så här:



Övning Lös olikheten
$$|x^2-2| < 1.$$

(Lösn. på nästa sida.)

<u>Lösning</u>: $|x^2-2|<1 \iff -1 < x^2-2 < 1$.

$$\iff \begin{cases} -1 < x^2-2 \\ x^2-2<1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x^2-1 \\ x^2-3<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+1)(x-1) > 0 \\ (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) < 0 \end{cases}$$

Vi söker de x som uppfyller <u>båda</u> olikheterna. Teckentabell:

x		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$	
$(x+1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+1)(x-1)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+\sqrt{3})$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-\sqrt{3})$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Lösningarna är de x där $(x+1)(x-1)>0$ <u>och</u> $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})<0$.

Detta ger $|x^2-2|<1 \iff$

$$-\sqrt{3} < x < -1 \text{ eller } 1 < x < \sqrt{3}$$

$\iff x$ tillhör $(-\sqrt{3},-1) \cup (1,\sqrt{3})$.

På tal-linjen: