Mer om komplexa tal

Låt $z = a + bi$ (där a, b är reella). Absolutbeloppet (eller bara beloppet) av z, betecknat $|z|$, definieras som

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Obs! $|z|$ är alltså avståndet till 0 i det komplexa talplanet.

Vi har också

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|,$$

så $|z|^2 = z\bar{z}$.

Vi har följande räkneregler (precis som för reella tal)

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},$$

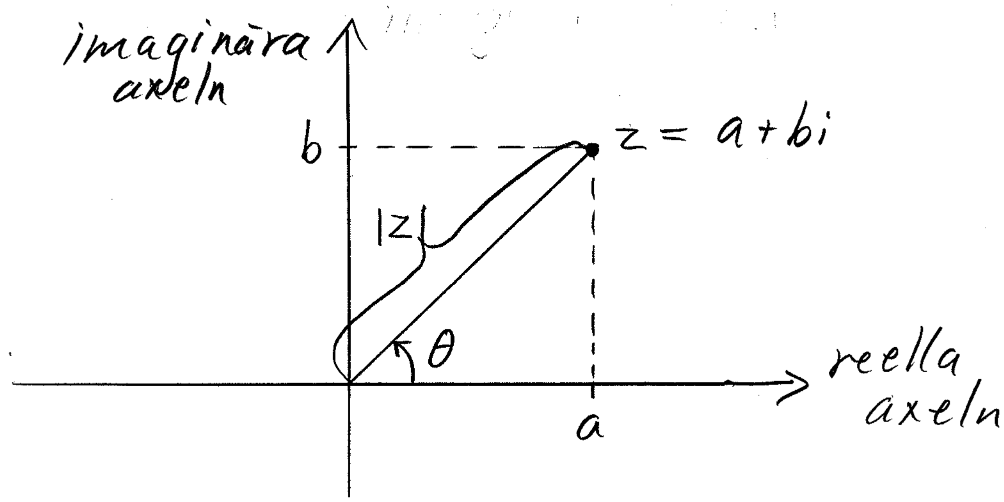
$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$

$$||z|| = |z|,$$

och $|\bar{z}| = |z|$.

Polär form

Varje komplext tal $z = a + bi$ bestäms av avståndet $|z|$ från $z = a + bi$ (i det komplexa talplanet) till 0 samt vinkeln mellan den reella axeln samt linjen som passerar igenom 0 och $a + bi$ (i det komplexa talplanet). Se figur på nästa sida.



Notera att $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{||z||} = \frac{|z|}{|z|} = 1$

om $z \neq 0$, och i detta fall så

ligger $\frac{z}{|z|}$ på enhetscirkeln*, så

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$$

vilket ger

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

(Om $z=0$, så $z = 0\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$.)

---

* Kom ihåg att för varje punkt på enhetscirkeln så finns en vinkel θ så att punktens x-koordinat är $\cos\theta$ och punktens y-koordinat är $\sin\theta$. I det komplexa talplanet motsvaras x-axeln av den reella axeln och y-axeln av den imaginära axeln.

Så varje komplext tal z kan representeras på formen

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

där $r = |z| =$ avståndet till 0 och θ är en vinkel som i föregående figur.

Vinkeln θ kallas för <u>argumentet</u> till z och betecknas $\mathrm{Arg}(z)$.

<u>Exempel</u> Låt $z = -\sqrt{3} + i$.
Då gäller att

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \quad \text{och}$$

$\mathrm{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6}$ om argumentet väljs i intervallet $[0, 2\pi)$. Så

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Men z kan också skrivas som

$$z = 2\left(\cos\frac{17\pi}{6} + i\sin\frac{17\pi}{6}\right)$$

eftersom $\cos\frac{17\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6}$

och $\sin\frac{17\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$, så

Arg(z) är <u>inte</u> unikt bestämt.

Man brukar dock välja som Arg(z) en lämplig vinkel som är så liten som möjligt.

<u>Övn.</u> Skriv följande tal på polär form:

(a) $-5+5i$

(b) $1-\sqrt{3}i$

<u>Övn.</u> Skriv följande tal på formen $a+bi$ (den s.k. "kartesiska formen"):

(a) $4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

(b) $10\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

Följande räkneregler gäller för argumentet:

$$\text{Arg}(zw) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(w).$$

(Detta kan man visa med hjälp av additionsformlerna för 'sin' och 'cos'.)

Eftersom vi har sett att

$$|zw| = |z||w| \text{ och } \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

så är det nu lätt att multiplicera och dividera komplexa tal på polär form.

Om $z = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ och

$w = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ så

$$zw = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

och

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

Det följer också att, för heltal n,

$$z^n = r_1^n\left(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1)\right).$$

Övning Låt

$$z = 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{och}$$

$$w = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Beräkna zw, $\frac{z}{w}$, $\frac{w}{z}$, z^4 och w^5.

Övning Skriv på polär form:

(a) $\dfrac{2+2i}{-1-\sqrt{3}i}$ (b) $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2+2i}$.

Binomiska ekvationer

En ekvation på formen

$$z^n = w$$

där w är ett komplext tal och n ett positivt heltal, kallas binomisk.

Exempel $z^3 = -8i$ är binomisk.

Vi illustrerar hur en sådan löses.

Skriv först högerledet på polär form, så ekvationen blir

$$z^3 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

Antag att $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ är en lösning, så

$$r^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = z^3 =$$

$$= 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm 2\pi k\right)\right)$$

där k är ett (godtyckligt) naturligt tal.
Detta ger

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{3\pi}{2} \pm 2\pi k \quad \text{där } k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2$ ger oss

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

Vi får lösningarna

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

På grund av våra resultat om rötter och faktorisering så har en n:te-gradsekvation högst n olika rötter. Eftersom våran ekvation har grad 3 så har vi funnit alla rötterna.

En binomisk ekvation

$$x^n = w$$

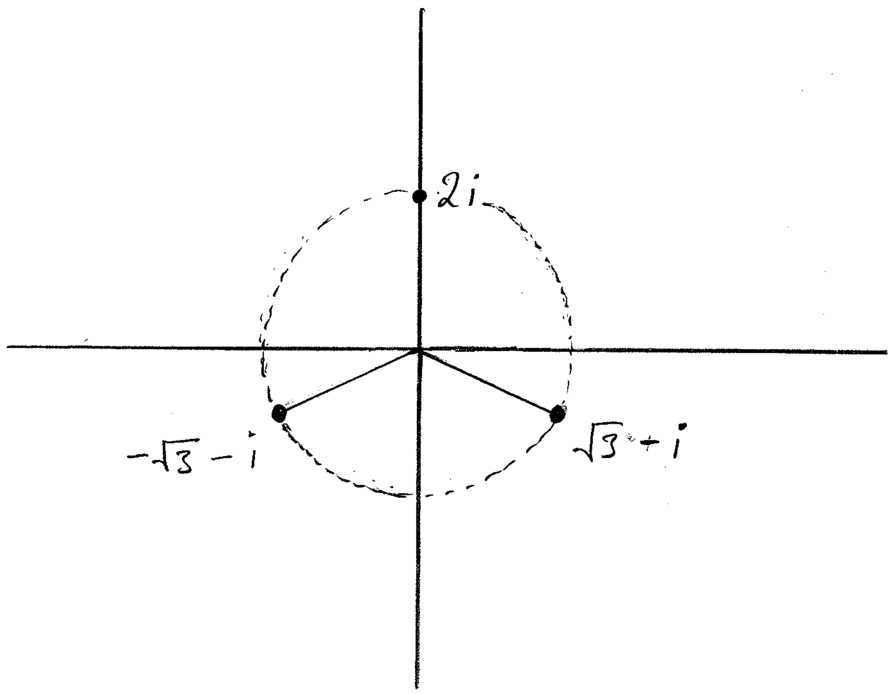
har alltid n olika rötter, och man finner dem på samma sätt som i exemplet.

Om $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ så har alla lösningarna beloppet $\sqrt[n]{r}$ och lösningarnas argument är

$$\theta_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

(där θ_k är argumentet för lösning nummer k).

Lösningarna i exemplet ser ut så här i det komplexa talplanet:



För binomiska ekvationer så är vinkeln mellan två påföljande lösningar densamma. (De är jämnt utspridda på en cirkel.)
Läs också exemplet i kompendiet om komplexa tal.